は じ め に

数学の入試問題は細かい基本事項の寄せ集めで成り立っています．ここで言う基本事項とは，公式・定義・定型的な技法（定石）のことで，思考するための道具，受験を突破するための武器といえるものです．本書はこの道具を修得し，武器をそろえるための問題集です．したがって，本書を卒業してはじめて「実戦的な」入試数学対策が始まります．

本書で扱っているレベルの問題をスラスラできるようにならないと，本格的な入試問題には対応できません．「受験数学の力」とは，暗記力と思考力を複合したものです．

「数学は暗記科目ではない」「思考することが一番大事なのだ」

と言う人もいます．では，まったくの0（ゼロ）から対数関数の必要性を感じ，自力でlogを定義し，公式を導いて問題を解く生徒はいるでしょうか？　九九を覚えず算数ができるようになった数学者はいるでしょうか？　普通は数学と言えどもある程度は暗記をしてから数学的な思考をしているはずです．

本書は「暗記する」ための問題集ですが，理解を伴わない暗記は危険です．まず問題を解き，解答・解説を読んで理解する．これを繰り返すことで結果的に「暗記してしまう」のです．

本書の始まりは駿台予備学校で何年も使用されてきた教材です．その後，高等学校採用書籍としてリニューアルし，全国の高校の現場で使ってもらいました．本書が成功したとしましたら，それは駿台予備学校の生徒達や全国の高校生の声，たくさんの高校の先生方のアドバイスのおかげです．教材として「ここがわかりにくい」「こうしたらいいのではないか」という活発な意見や質問があったからこそ，本当に学習効果が上がる問題配列・基本事項のまとめができたのです．

末筆ながら，いままで予備学校講師として教えてきた生徒達全員と，出版の機会を与えて下さった駿台文庫と担当の加藤達也氏，内容校正からミスの指摘までお世話になりました駿台文庫の林拓実氏，前橋桂介氏に感謝致します．

杉山　義明

本書の特長

◆特　長

Ⅰ．高校数学全分野の問題を収録

学習効果を考慮し，系統的に学べるように配列しました．ただし，主要大学の入試問題を意識して，データの分析・統計関連は未収録です．

入試問題に含まれる基本的な内容をぶつ切りにして，パーツ練習ができるように配慮しました．なるべく**一つの問題に一つのテーマだけが含まれるようにしています．**

Ⅱ．全 1292 問／すべての問題にレベルを表示

各問題番号には以下の規則でレベル表示をしましたので，目的に合わせてご使用ください．

無印：基本問題（教科書の練習問題レベル）

＊印：標準問題（教科書の練習問題よりやや難しいレベル）

＊＊印：（本書としては）やや難しい問題

Ⅲ．詳しい解説で自学・自習が可能

各解答には，問題の「**本当に重要な考え方／関連事項**」を「**ポイント解説**」**として記しています**（点線で囲まれた部分）．入試問題は複数のテーマが混在していたり，いろいろ肉付けして迷彩がかかっていたりします．本書ではそれを剥ぎ落とし，習得すべき本質だけを抽出した問題構成をしていますので，この問題ならこんなやり方しなくても…と思うような解答をしている場合があります．それはこのテーマを入試問題で問われるときは，このやり方をしないと対処できないということだと思ってください．そのあたりの説明は，「ポイント解説」で行っています．

Ⅳ．公式・定理・定義をまとめた「要項集」

問題冊子の後半には，**実際に問題を解くために必要な考え方・公式・定理を「要項集」としてまとめてあります．**本書以外の参考書や問題集の演習の際にも参考にしてみてください．学習効果はますます上がることでしょう．

本書の利用法の一例

◆まず，練習問題

Ⅰ．できそうなところから始めてみる

本書は構成上どの分野から始めても大丈夫です．まずはできそうな問題から始めてみましょう．

Ⅱ．かならず自分の「手を動かす」こと

かならず自分のノートに「自分の手で」解答を書くようにしましょう．どんな時代になっても，数学は紙と鉛筆でやるものです．問題を読んで，解答を眺めて見てるだけの勉強は何の意味もありません．そんなやり方で100問やったとしても，しっかり手を動かして頭を働かせた10問には勝てません．

Ⅲ．自分のレベルに合わせた練習を

まず，**無印の問題は完全に自力で解けるように**してください．そして，＊印・＊＊印の問題に順次取り組んでください．とりあえず**＊印の問題まですべてやり終えれば，教科書の基本事項はすべて身についた**と言えるレベルです（＊＊印は時間に余裕のあるときで構いません）．

Ⅳ．答え合わせをしたら，「ポイント解説」を熟読

「ポイント解説」は次のような要素が凝縮されています．

- **陥りがちな箇所を指摘**
- **出題背景を説明**
- **記述された解答の理由を説明**
- **参照すべき要項集の番号を☞で指示**
- **関連付けて学習することが望ましい問題を▶で指示**

答え合わせが終わったら，必ず「ポイント解説」を読んでください．入試問題での応用の仕方，類題の提示，問題の背景などが書いてありますので，理解が一層深まることでしょう．

Ⅴ．「要項集」で公式・定理の確認・暗記

公式や定理というのは，暗記することは当然として，証明することも大切です．重要な証明や入試でよくでる証明などは 証明 として書いてあります．必ず自力で一度証明しましょう．また，証明ほど厳密ではないが記憶に残りやすい説明には 説明 と入れています．結局，**地道な努力が確実な基礎力を養う**のです．「ポイント解説」で参照番号が出てきたときには，面倒くさがらずに該当する記述を調べましょう．

もくじ

■ 問題編

問題編

§1　数と式（数Ⅰ・Ⅱ）

1-01. $x^2y-2x^2z+2y^2z-xy^2$ を因数分解せよ．

1-02. $2x^2-3xy-2y^2-7x-y+3$ を因数分解せよ．

1-03. x^4-5x^2-36 を因数分解せよ．

1-04. x^4-7x^2+9 を因数分解せよ．

* ***1-05.*** n^4+4 が素数となる整数 n の値を求めよ．

1-06. $(b-c)^3+(c-a)^3+(a-b)^3$ を因数分解せよ．

1-07. $x^4+4x^3-2x^2+ax+b$ が完全平方式になるように，定数 a, b の値を求めよ．

* ***1-08.*** $x^2+2xy-3y^2+8x+a=0$ が 2 直線を表す方程式となるように，定数 a の値を定めよ．

1-09. $3x^2-5x+1=a(x-1)^2+b(x-1)+c$ が x についての恒等式となるように，定数 a, b, c の値を定めよ．

1-10. $x^3=ax(x+1)(x+2)+bx(x+1)+cx+d$ が x についての恒等式となるように，定数 a, b, c, d の値を定めよ．

* ***1-11.*** 任意の θ に対し $a\cos\theta+b\sin\theta+c=0$ が成り立つ条件が $a=b=c=0$ であることを証明せよ．

1-12. $2x^3+ax+10$ を x^2-3x+b で割った余りが $3x-2$ であるとき，定数 a, b の値を求めよ．

1-13. $x+2$ で割ると余りが -4, $x-3$ で割ると余りが 6 である整式 $f(x)$ を $(x+2)(x-3)$ で割ったときの余りを求めよ．

* ***1-14.*** $x+2$ で割ると余りが -4, $x-3$ で割ると余りが 6 となる整式 $f(x)$ の中で，次数が最も低いものを求めよ．

* ***1-15.*** x^2+1 で割ると余りが $2x+1$，$x-1$ で割ると余りが 7 である整式 $f(x)$ を $(x-1)(x^2+1)$ で割ったときの余りを求めよ．

1-16. n を 2 以上の整数とする．x^n-1 を $(x-1)^2$ で割ったときの余りを求めよ．

* ***1-17.*** $x^{15}+x+1$ を x^2+x+1 で割ったときの余りを求めよ．

1-18. $f(x)=2x^3+5x^2+3x+3$ のとき，$f(-1+\sqrt{2})$ の値を求めよ．

1-19. $\sqrt{x^2+1}+x=t$ のとき，$\sqrt{x^2+1}$, x を t の式で表せ．

1-20. n を自然数とするとき，$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ と $\sqrt{n}-\sqrt{n-1}$ の大小を比較せよ．

要項集

§1　数と式（数 I・II）

1.　複素数

- 複素数
  - 実数
    - 有理数
      - 小数
        - 有限小数
        - 循環小数
      - 整数
        - 正の整数（= 自然数）
        - 0
        - 負の整数
    - 無理数（循環しない無限小数）
  - 虚数

1–(1)　有理数

整数 $m, n\ (\fallingdotseq 0)$ によって $\dfrac{m}{n}$ の形で表される数を有理数という．$n = 1$ のとき整数となる．また，$\dfrac{m}{n}$ が既約分数で n が 2, 5 以外の素因数をもつとき循環小数となる．

1–(2)　無理数

有理数でない実数を無理数という．

1–(3)　実数の絶対値

① 数直線上において，$\mathrm{P}\,(a)$ と原点との距離を $|a|$ と表す．

② 2 点 $\mathrm{A}\,(a), \mathrm{B}\,(b)$ の距離は $|a-b|$

③ $|a| = \begin{cases} a & (a \geqq 0 \text{ のとき}) \\ -a & (a < 0 \text{ のとき}) \end{cases}$

④ 任意の実数 x に対し

$$|x| \geqq x$$

1–(4)　相当

① a, b が実数で，i を虚数単位とするとき

$$a + bi = 0 \iff a = b = 0$$

② a, b が有理数で，$\sqrt{m}$ を無理数とするとき

$$a + b\sqrt{m} = 0 \iff a = b = 0$$

2.　整式，多項式

数や文字，およびそれらをかけただけでつくられる式（**単項式**）の和として表される式を**多項式**（**整式**）という．特に x の多項式（整式）とは　$a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$　$(a_0, a_1, \cdots, a_n$ は実数）の形で表せるもの．$a_n \fallingdotseq 0$ のとき次数は n であり，定数だけの単項式の次数は 0 である（ただし数 0 の次数は考えない）．

3.　恒等式

文字にどのような値を代入しても，常に成り立つ等式を恒等式という．

3–(1)　多項式の恒等式

P, Q を x についての多項式とする．

$P = 0$ が恒等式　$\iff$　P の各項の係数はすべて 0 である

$P = Q$ が恒等式　$\iff$　P と Q の次数は等しく，両辺の同じ次数の項の係数は，それぞれ等しい

3–(2)　よく用いる恒等式

① $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$

② $(a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab$

③ $a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$

④ $a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca)$

⑤ $a^2 + b^2 + c^2 \pm ab \pm bc \pm ca = \dfrac{1}{2}\{(a \pm b)^2 + (b \pm c)^2 + (c \pm a)^2\}$　（複号同順）

⑥ $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

⑦ $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$

駿台受験シリーズ

入試数学「実力強化」問題集

杉山義明　著

解答編

駿台文庫

もくじ

§1　数と式（数Ⅰ・Ⅱ）

1-01. $(\text{与式})=x^2y-xy^2-2(x^2-y^2)z$

$=xy(x-y)-2(x-y)(x+y)z$

$=\boldsymbol{(x-y)(xy-2xz-2yz)}$

因数分解を行うときは，まず次数の低い文字で整理する．

1-02. $(\text{与式})=2x^2+(-3y-7)x-(2y^2+y-3)$

$=2x^2+(-3y-7)x-(2y+3)(y-1)$

$=\{2x+(y-1)\}\{x-(2y+3)\}$

$=\boldsymbol{(2x+y-1)(x-2y-3)}$

x, y の次数が等しいので，いずれかの文字で整理して因数分解する．

1-03. $(\text{与式})=(x^2-9)(x^2+4)$

$=\boldsymbol{(x-3)(x+3)(x^2+4)}$

複2次式の因数分解は x^2 を1つのカタマリとした2次式の因数分解を行う．

1-04. $(\text{与式})=x^4-6x^2+9-x^2=(x^2-3)^2-x^2$

$=\boldsymbol{(x^2-x-3)(x^2+x-3)}$

1-03 のようにできない場合は x^4 の項と定数項で $(\quad)^2$ を作り，全体として $(\quad)^2-(\quad)^2$ の形にする．

1-05. n^4+4 は

$n^4+4n^2+4-4n^2$

$=(n^2+2)^2-(2n)^2$

$=(n^2-2n+2)(n^2+2n+2)$

と因数分解できる．$n^2\pm2n+2>0$ だから，n^4+4 が素数であるためには

$n^2+2n+2=1$ または $n^2-2n+2=1$

であることが必要．このとき $n=\pm1$ であり $n^4+4=5$ となり素数である．

したがって　$\boldsymbol{n=\pm1}$

1-04 の経験から，この式が因数分解できると気づくことがポイントである．整数 x, y が $xy=(\text{素数})$ をみたすとき，x, y の一方が ±1 である．

1-06. $b-c=x$, $c-a=y$, $a-b=z$ とおくと $x+y+z=0$ である．そこで公式

$x^3+y^3+z^3-3xyz$

$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$

を利用すると，右辺は0だから

$(\text{与式})=x^3+y^3+z^3=3xyz$

$=\boldsymbol{3(b-c)(c-a)(a-b)}$

別解　展開して a で整理すると

$(\text{与式})=3(c-b)a^2-3(c^2-b^2)a+3bc(c-b)$

$=3(c-b)\left\{a^2-(c+b)a+bc\right\}$

$=3(c-b)(a-b)(a-c)$

$=\boldsymbol{3(a-b)(b-c)(c-a)}$

覚えにくい公式だから，要項にある証明を確認しておくこと．☞3–⑵⑥

1-07. $x^4+4x^3-2x^2+ax+b$ ……① が完全平方式となるとき x^4 の係数に注目すると①は

$(x^2+px+q)^2$

$=x^4+2px^3+(p^2+2q)x^2+2pqx+q^2$

と変形できる．①と係数比較すると

$2p=4$, $p^2+2q=-2$, $2pq=a$, $q^2=b$

$\therefore$　$p=2$, $q=-3$, $\boldsymbol{a=-12}$, $\boldsymbol{b=9}$

完全平方式になるとは，最高次が x^4 だから $(x^2+\cdots)^2$ という形になること．

1-08. 左辺の2次式 $x^2+2xy-3y^2=(x-y)(x+3y)$ の部分に注目すると左辺は

$(x-y+b)(x+3y+c)$

$=x^2+2xy-3y^2+(b+c)x+(3b-c)y+bc$

と変形できる．これともとの左辺の式を係数比較すると

$b+c=8$, $3b-c=0$, $bc=a$

$\therefore$　$\boldsymbol{a=12}$, $b=2$, $c=6$

別解　与式を x で整理して解の公式を用いると

$x^2+2(y+4)x-3y^2+a=0$

$\therefore$　$x=-(y+4)\pm\sqrt{4y^2+8y+16-a}$

これが2直線を表すのは $x=(y\text{ の1次式})$ となるときだから，上式の根号内が完全平方式になることである．それは $4y^2+8y+16-a=0$ が重解をもつときだから判別式を D とすると

$\dfrac{D}{4}=16-4(16-a)=0$　　$\therefore$　$\boldsymbol{a=12}$