● はじめに

本書はこれから受験数学を勉強しようと思っている人向けの問題集です. 例年学生の諸君から「教科書や定期テストに出る問題ならなんとか解けるんだけど，いざ受験レベルの問題となると…」「大学入試で合否を分けるようなレベルの問題が解けないんですが，どうすればよいでしょうか？」などの相談，質問が多数寄せられます. そこで教科書から受験数学にスムーズにステップアップでき，かつ受験で合格するための必要十分な知識を得られるような問題集があれば，数学を苦手に思っている受験生のためになるのではないか.

そのような考えから執筆に至った前著「ここからはじめる受験数学Ⅰ・A」をもとに、問題・解答をブラッシュアップして新たに書き換えたものが本書になります. 改訂にあたり，前著を実際に使っていただいた方々からの意見を可能なかぎり反映し，さらに学習効果が上がるよう，40 題以上の問題を追加・差し替えました.

原稿を書くにあたって以下の点にとくに注意を払っています.

（ア） 教科書と受験数学のギャップを埋めるレベルの問題を中心に構成する.
（イ） 本問題集を勉強することによって最難関大を除く「すべての大学」の合格レベルに到達できるようにする. また最難関大についても，そのレベルに到達する一歩手前の問題までは十分にカバーする.
（ウ） 高校数学の全ての話題を網羅的に取り上げる.
（エ） 問題を解く上で必要となる「考え方」を細かく説明する.
（オ） 「別解」も可能な限りたくさん掲載する.
（カ） 問題の背景や数学的に興味深い内容などに積極的に触れる.

本書はさまざまな方のご協力のもと出版に至っています. まず執筆の段取り，取りまとめをしてくださった駿台文庫編集部の加藤達也さん，林拓実さん，前橋桂介さん、三人に粘り強く助言，アドバイスをしていただいたおかげで本書は完成しました. 本当にありがとうございました. また駿台予備学校の吉原修一郎先生，塩谷洋太先生，牛久保智仁先生には問題，解答に関して多くの助言をいただき，ときには華麗な別解も指摘していただきました. この場を借りて，感謝申し上げます.

本書がこれから受験数学を学ぶ全ての学生の役に立つことを願います.

藤原　新

● 利用法

本書は「A 基礎問題」，「B 標準問題」の 2 段構成となっています.

「A 基礎問題」は高校の教科書や定期テストレベルの確認問題

「B 標準問題」は標準的な受験レベルの問題

で構成されています.

なお，特に重要な分野には「〜と応用」というセクションがあります. ここは全体的にやや難しめの問題で構成されているので，数学に苦手意識のある人，あるいはその単元を習ったばかりの人はあと回しでも構いません.

各問題には目標時間をつけています. これは大学受験で出題されたときに，これくらいの時間で解いてほしいという大まかな目安です. とりあえずこの時間内に解くことを目指し，解けなければ解答を読むというスタンスでよいでしょう. 解けなかった問題にはチェックをつけておいて，時間をおいて再度チャレンジしてみて下さい.

これから受験勉強を本格的にはじめたい人，あるいは**まだ受験生ではないが教科書レベルの問題は十分に解けて，本格的に数学を勉強したいと思っている人**は，各セクションごとにまずは「A 基礎問題」に取り組み，次に「B 標準問題」に進むとよいでしょう.

基礎的な問題からまずは網羅したいという人は，「〜と応用」を除く「A 基礎問題」だけを先に解き進めましょう. 全部で 76 題ありますので，1 日 3 題ずつ解いていけば 1 ヶ月弱で十分解き終えることができます. そのあとに「B 標準問題」，「〜と応用」のセクションの順で進めるとよいでしょう.

学校の進度と並行して進めたい人は，「〜と応用」を除く「A 基礎問題」を中心に取り組むとよいでしょう. 十分に理解できていると思ったら，「B 標準問題」や「〜と応用」のセクションにもチャレンジしてみて下さい.

※　一部 * マークがついている問題については数学 II・B の知識を使うことを想定しています. 解法によっては回避できる場合もありますが，数学 II・B を未習の場合は飛ばしても構いません.

●　目次

※　カッコ内は解答編のページ番号

数と式

[A：基礎問題]

問題 1　目標時間 10 分

次の式を因数分解せよ.

（1）　$15x^2+2xy-24y^2$

（2）　$2x^2-6y^2-xy+10x+y+12$

（3）　$x(x+1)(x+2)(x+3)-24$

（4）　x^4+4

（5）　$a^3b-3a^2-4ab+12$

問題 2　目標時間 5 分

次の問いに答えよ.

（1）　$\dfrac{4}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ の分母を有理化せよ.　（上智大）

（2）　$\sqrt{2-\sqrt{3}}$ を 2 重根号のない形で表せ.

問題 3　目標時間 5 分

$\dfrac{4}{\sqrt{5}-1}$ の整数部分を a，小数部分を b とすると，$a=\boxed{}$，$b=\boxed{}$ であり，$a^2-b^2-4a-4b=\boxed{}$ である.

問題 4　目標時間 15 分

次の問いに答えよ.

（1）　$a+b=3$，$ab=1$ のとき，次の式の値を求めよ.

（i）　a^2+b^2

（ii）　a^3+b^3

（iii）　a^5+b^5

（2）　$x-\dfrac{1}{x}=\sqrt{7}$ のとき，$x^2+\dfrac{1}{x^2}=\boxed{}$ である. さらに，x^4 の整数部分は $\boxed{}$ である. ただし $x>0$ とする.

問題 5　目標時間 10 分

次の式を計算せよ．

（1）　$\dfrac{\dfrac{2}{x+1}+\dfrac{1}{x-1}}{3+\dfrac{2}{x-1}}$　（獨協大）

（2）　$\left(1-\dfrac{2x}{x^2+x+1}\right)\div\dfrac{x^3+1}{x^3-1}\times\dfrac{2x^2+x-1}{2x^2-x-1}$　（札幌大）

（3）　$\dfrac{ab}{(a-c)(c-b)}+\dfrac{ac}{(b-a)(c-b)}+\dfrac{bc}{(a-b)(c-a)}$　（近畿大）

[B: 標準問題]

問題 6　目標時間 10 分

$x=\dfrac{2a}{1+a^2}$ のとき

$$\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$$

の値を求めよ．ただし，a は 0 でない実数とする．

（東京水産大）

問題 7　目標時間 10 分

$x+y+z=0$，$x^2+y^2+z^2=20$，$xyz=-4\sqrt{3}$ のとき，次の式の値を求めよ．

（1）　$xy+yz+zx$

（2）　$x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2$

（3）　$x^3+y^3+z^3$

三角比

[A：基礎問題]

問題59　目標時間 10 分

次の各問いに答えよ．

（1）　θ は鋭角とする．$\sin\theta = \dfrac{1}{3}$ のとき，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ．

（2）　$2\cos^2\theta + \sin\theta\cos\theta - 2 = 0$ $(0° \leqq \theta < 90°)$ のとき，$\tan\theta$ の値を求めよ．

（3）　$3\cos\theta - \sin\theta = 1$ $(0° \leqq \theta \leqq 180°)$ のとき，$\cos\theta$ の値を求めよ．

問題60　目標時間 10 分

$\dfrac{1}{\sin\theta} + \dfrac{1}{\cos\theta} = 2\sqrt{2}$ とするとき，$\sin^3\theta + \cos^3\theta$ の値を求めよ．

問題61　目標時間 5 分

$\cos 14°$，$\cos 135°$，$\sin 56°$，$\sin 162°$ を小さい順に並べよ．

問題62　目標時間 10 分

$0° \leqq \theta \leqq 180°$ のとき， 次の方程式， 不等式を解け．

（1）　$\sqrt{2}\cos\theta - 1 = 0$

（2）　$4\cos^2\theta + 2(1+\sqrt{3})\sin\theta - (4+\sqrt{3}) > 0$

（3）　$(2\cos\theta - \sqrt{3})(\tan\theta - \sqrt{3}) < 0$

[B: 標準問題]

問題63　目標時間 10 分

$0° \leqq x \leqq 90°$，$0° \leqq y \leqq 90°$ のとき，連立方程式

$$\begin{cases} \sin x = \cos 2y \\ \sin 2x = \sin y \end{cases}$$

を解け．

問題64　目標時間 15 分

$0° \leqq x \leqq 180°$ のとき x の方程式

$$2\cos^2 x + \sin x + a = 0$$

の解の個数を，a の値の範囲によって分類せよ．

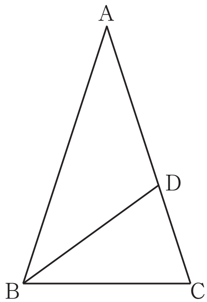
問題65　目標時間 20 分

三角形 ABC（下の図）において

$$\angle A = 36°,\ AB = AC,\ AD = BD = BC = 1$$

とする．$\triangle ABC$ と $\triangle BCD$ が相似であることに着目すれば，$AB = \boxed{}$ であることがわかる．このとき，$2AD\cos 36° = AB$ より，$\cos 36° = \boxed{}$ となる．

また，$2AB\sin 18° = \boxed{}$ より，$\sin 18° = \boxed{}$，$\cos^2 18 = \boxed{}$ となる．これより，$\triangle ABC$ を辺 AC を軸として 1 回転させたときにできる立体の体積は $\boxed{}$ であることがわかる．ただし $\boxed{}$ には数値が入るものとする．



（成蹊大（改））

平面図形

[A：基礎問題]

問題 172　目標時間 15 分

次の問いに答えよ．

（1）　三角形 ABC は AB $=4$，AC $=5$，$\cos A=-\dfrac{1}{5}$ をみたす．三角形 ABC の重心を G とするとき AG の長さを求めよ．

（2）　AB $=2$，BC $=4$，CA $=3$ である △ABC がある．△ABC の内心を I，点 A に対する傍心を J とする．AI：IJ を求めよ．

問題 173　目標時間 15 分

次の問いに答えよ．

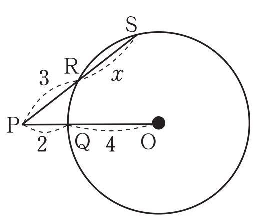
（1）　三角形 ABC の辺 AB，BC 上にそれぞれ点 D，E を，AD：DB $=1:3$，BE：EC $=5:2$ となるようにとる．線分 AE と線分 CD の交点を H，BH の延長と辺 AC との交点を F とする．このとき，線分 CF と線分 FA の長さの比は $\dfrac{\text{CF}}{\text{FA}}=\boxed{}$，線分 FH と線分 HB の長さの比は $\dfrac{\text{FH}}{\text{HB}}=\boxed{}$，三角形 ADH と三角形 ABC の面積の比は $\dfrac{\triangle\text{ADH}}{\triangle\text{ABC}}=\boxed{}$ となる．（東京薬科大（改））

（2）　△ABC の内接円が辺 BC，CA，AB に接する点をそれぞれ P，Q，R とするとき AP，BQ，CR が 1 点で交わることを示せ．（大阪薬科大（改））

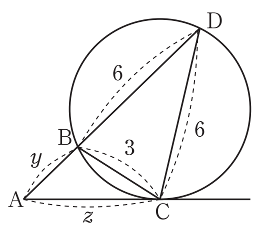
問題 174　目標時間 10 分

下図において x，y，z を求めよ．ただし点 O は円の中心，点 C は接点である．

（1）



（2）



問題 175　目標時間 15 分

（1）　2 つの円の半径をそれぞれ，R，r とし，中心間の距離を d とする．これらの円の位置関係が次の ① から ⑤ の場合，R，r，d の関係はどのようになるか．選択肢 1〜7 のうちからそれぞれ選べ．

① 2 円が互いに他の外部にあるとき，$\boxed{}$

② 2 円が外接しているとき，$\boxed{}$

③ 2 円が異なる 2 点で交わるとき，$\boxed{}$

④ 2 円が内接しているとき，$\boxed{}$

⑤ 2 円の一方が他方の内部にあるとき，$\boxed{}$

【選択欄】

1.　$d = |R - r|$　　2.　$d < |R - r|$　　3.　$d > |R - r|$　　4.　$d = R + r$

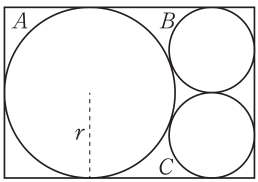
5.　$d < R + r$　　6.　$d > R + r$　　7.　$|R - r| < d < R + r$

（湘南工科大（改））

（2）　下の図で，半径 r の円 A と半径の等しい円 B，C が長方形に内接し，かつ 3 円は 2 つずつ互いに外接している．このとき，次の問いに答えよ．

（i）　円 B の半径を r で表せ．

（ii）　長方形の面積 S を r で表せ．



（岐阜聖徳学園大）

[B: 標準問題]

問題 176　目標時間 15 分

四角形 ABCD の辺 AB，BC，CD，DA の中点をそれぞれ P，Q，R，S とするとき

$$\mathrm{AC}^2 + \mathrm{BD}^2 = 2(\mathrm{PR}^2 + \mathrm{QS}^2)$$

が成り立つことを示せ．

第１章　数式の基礎

●1　数と式

問題 1

考え方　（因数分解）

（２）　x について降べきの順に整理します．y について整理しても構いません．

（３）　同じ式が出てくるような組合せを考えて，展開します．

（４）　複二次式の因数分解とよばれるタイプで，２乗の形を無理矢理作ります．

（５）　複数の文字が入る複雑な因数分解は，**低次の文字で整理する**のが原則です．与式は a については３次，b については１次ですから，b について整理します．

解答

（１）　$\boldsymbol{(3x+4y)(5x-6y)}$

（２）　$2x^2-6y^2-xy+10x+y+12$

$$=2x^2-(y-10)x-(6y^2-y-12)$$
$$=2x^2-(y-10)x-(3y+4)(2y-3)$$
$$=\boldsymbol{(2x+3y+4)(x-2y+3)}$$

（３）　$x(x+1)(x+2)(x+3)-24$

$$=(x^2+3x)(x^2+3x+2)-24$$

$x^2+3x=t$ とおくと

$$t(t+2)-24$$
$$=t^2+2t-24$$
$$=(t-4)(t+6)$$
$$=(x^2+3x-4)(x^2+3x+6)$$
$$=\boldsymbol{(x+4)(x-1)(x^2+3x+6)}$$

（４）　x^4+4

$$=(x^4+4x^2+4)-4x^2$$
$$=(x^2+2)^2-(2x)^2$$
$$=(x^2+2+2x)(x^2+2-2x)$$
$$=\boldsymbol{(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)}$$

（５）　$a^3b-3a^2-4ab+12$

$$=b(a^3-4a)-3(a^2-4)$$
$$=ab(a^2-4)-3(a^2-4)$$
$$=(ab-3)(a^2-4)$$
$$=\boldsymbol{(ab-3)(a+2)(a-2)}$$

問題 2

考え方　（有理化・２重根号の外し方）

（１）　分母の $\sqrt{3}$ を最初に消すと，計算が楽です．

（２）　２重根号は

$$\sqrt{a+b\pm2\sqrt{ab}}=\sqrt{(\sqrt{a}\pm\sqrt{b})^2}$$
$$=\left|\sqrt{a}\pm\sqrt{b}\right|$$

と変形して，外側のルートを外します．

解答

（１）　$\dfrac{4}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

$$=\frac{4\{(1+\sqrt{2})-\sqrt{3}\}}{\{(1+\sqrt{2})+\sqrt{3}\}\{(1+\sqrt{2})-\sqrt{3}\}}$$
$$=\frac{4(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})}{(1+\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2}$$
$$=\frac{4(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})}{(3+2\sqrt{2})-3}$$
$$=\frac{4(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})}{2\sqrt{2}}$$
$$=\boldsymbol{\sqrt{2}+2-\sqrt{6}}$$

（２）　$\sqrt{2-\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}$

$$=\frac{\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}}{\sqrt{2}}=\frac{\left|\sqrt{3}-1\right|}{\sqrt{2}}$$
$$=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}}$$

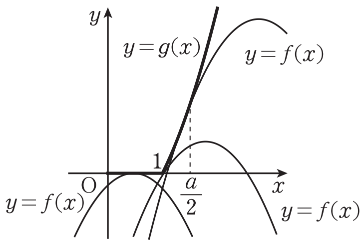
注意　実際に２重根号を外すときは，途中計算は省きます．例えば $\sqrt{4-2\sqrt{3}}$ の

となる.
$1 \leqq a < 2$ のときは上記の計算から
$y = f(x)$ と $y = x^2 - 1$ は $x \geqq 1$ で接することはできず，ぴったりくっつくのは
$y = f(x)$ が $(1, 0)$ を通るときで

$$0 = -(1-a)^2 + b$$

$$b = (a-1)^2$$

となる. $0 \leqq a \leqq 1$ のときは $b = 0$ とすると $y = f(x)$ と $y = g(x)$ は接する.



これらから求める条件は

$$b \leqq \begin{cases} 0 & (0 \leqq a \leqq 1 \text{ のとき}) \\ (a-1)^2 & (1 \leqq a \leqq 2 \text{ のとき}) \\ \frac{a}{2}^{2} - 1 & (a \geqq 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

であり，$x \leqq 0$ のときも同様に考えると**解答**の図が得られる.

第４章　図形と計量

●1　三角比

問題59

考え方　（三角比の相互関係）

$$\boldsymbol{\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1}$$

$$\boldsymbol{\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}}$$

$$\boldsymbol{1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}}$$

を用います.
（２）　与式の両辺を $\cos^2\theta$ で割ることで，$\tan\theta$ だけの式で表せます.
（３）　$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ と連立します.

解答

（１）　$\sin\theta = \frac{1}{3}$ より

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cos^2\theta = 1$$

$$\cos^2\theta = \frac{8}{9}$$

θ は鋭角より $\cos\theta > 0$ だから

$$\boldsymbol{\cos\theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}}$$

また

$$\boldsymbol{\tan\theta} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = \boldsymbol{\frac{1}{2\sqrt{2}}}$$

（２）　与式の両辺を $\cos^2\theta\,(\neq 0)$ で割ると

$$2 + \frac{\sin\theta}{\cos\theta} - 2\cdot\frac{1}{\cos^2\theta} = 0$$

$$2 + \tan\theta - 2(1 + \tan^2\theta) = 0$$

$$2\tan^2\theta - \tan\theta = 0$$

$$\tan\theta(2\tan\theta - 1) = 0$$

$$\boldsymbol{\tan\theta = 0,\ \frac{1}{2}}$$

これは $0^\circ \leqq \theta < 90^\circ$ をみたす.
（３）　$3\cos\theta - \sin\theta = 1$ より

$$\sin\theta = 3\cos\theta - 1 \quad \cdots①$$

第８章　図形の性質

●1　平面図形

問題 172

考え方　（三角形の五心）

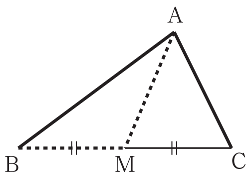
三角形の五心の位置に関する問題です（五心については**注意**を参照）.

（１），（２）では次の２定理を用いると，計算が楽です. 便利なので，必ず使えるようにしておきましょう.

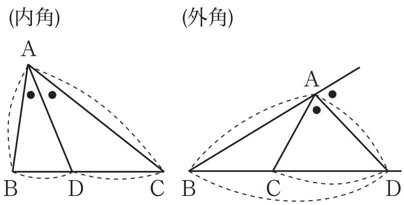
（パップスの中線定理）

△ABC において BC の中点を M とするとき

$$\mathbf{AB^2 + AC^2 = 2(AM^2 + BM^2)}$$



（角の二等分の定理）



∠A における内角，外角の二等分線と直線 BC の交点を D とすると

$$\mathbf{BD : DC = AB : AC}$$

解答

（１）　余弦定理より

$$BC^2 = 4^2 + 5^2 - 2\cdot 4\cdot 5\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)$$

$$= 49 \quad \therefore \quad BC = 7$$

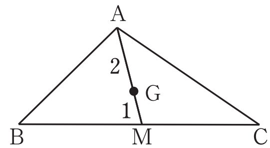
次に BC の中点を M とする. 中線定理より

$$4^2 + 5^2 = 2\left\{AM^2 + \left(\frac{7}{2}\right)^2\right\}$$

$$AM^2 = \frac{33}{4} \quad \therefore \quad AM = \frac{\sqrt{33}}{2}$$

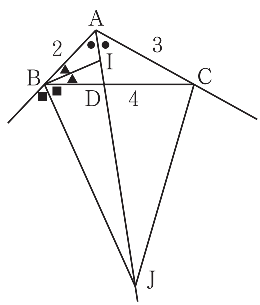
重心 G は AM を 2 : 1 に内分するから

$$\mathbf{AG = \frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{33}}{2} = \frac{\sqrt{33}}{3}}$$



※　図中の数値は比を表す.

（２）　次図のように３点 A，I，J は ∠A の内角の二等分線上にある. また，この直線と辺 BC の交点を D とする.



∠A の内角の二等分の定理より

$$BD : DC = AB : AC = 2 : 3$$

よって

$$BD = 4\cdot\frac{2}{2+3} = \frac{8}{5}$$

内心 I は ∠B の内角の二等分線上にあるから，内角の二等分の定理より

$$AI : ID = BA : BD = 2 : \frac{8}{5} = 5 : 4 \quad \cdots①$$

さらに傍心 J は ∠B の外角の二等分線上にあるから，外角の二等分の定理より

$$AJ : JD = BA : BD = 5 : 4$$

すなわち

$$AD : DJ = 1 : 4 \quad \cdots②$$