はじめに

物事にはすべて理由がある，というのが科学の考え方です．なかでも数学は「・・・の理由から・・・が成り立つ」という形の推論をつなげていく作業であると言ってよいでしょう．理論にしたがって推論をつなげていく作業．だからこそ，理論の基礎をしっかりと把握し，それをつなげて議論を進めていけるようにすることが大切です．この問題集は，基礎としてこれだけ知っていればよい，これだけ使えればよい，という必須事項の全体像をコンパクトに提示することを目的としました（そのため，「数学と人間の活動」の分野では，整数に関する問題だけを取り上げました）．基礎的なことで疑問を感じたら，教科書に立ち返ることも大切です．しかし，実際は，ここにあることを理解し，使えるようになれば，覚えてくり返すべき内容や形式としてはそれで十分でしょう（あとはそれを使って未知の問題にチャレンジすることが重要です．応用問題への道筋にも注意を払いました）．この問題集が，みなさんにとって，高校数学の基本を確認し，主要事項を使えるようになるための礎（いしずえ）になることを願ってやみません．

この小さな問題集が出来るまでに多くの方々のお世話になりました．

編集の梶原一也さん，加藤達也さん，大坂美緒さんには大変なご苦労とご迷惑をおかけしました．ここにお礼とおわびを申し上げます．また，いまだ構想段階にあった数年前に背中を押してくれた吉井健二さん，校閲と貴重な助言をしていただいた小松崎和子先生，終盤，原稿に目を通して，気づかなかった点を指摘してくれた小沢英雄先生，デザインとレイアウトを助けてくれた平井素子さん，改訂に際してご教示いただいた齋藤大成先生，編集の林拓実さん，前橋桂介さんに感謝の意を表します．そして，折々に著者の疑問に付き合ってくれた多くの先生方，職員の方々，どうもありがとうございました．

著者を代表して　　　桐山宣雄

本書の特長と利用法

実際の使い方としては

1. まず 例題 を解いてみてください.
2. それから解答を確認し，自分の今いる地点(実力)を確認してください(問題は解けたか，言葉の意味は知っていたか，公式は覚えていたか，公式は使えたか，計算はできたか，などなど).
3. 例題が解けず，解答を読んだものについては，間をあけず復習問題を紙の上で解いてみてください(そのため多くの復習問題は例題と同程度の類題にとどめてあります). 真似て解いてみることも基礎を定着させるにはとても大切なことです.
4. 疑問がわいたら，計算については傍注，理論的な事についてはAssistを見ること. 公式は基礎として重要な定理はおおよそ載せてあります. 必要に応じて，概念の約束である定義も傍注や公式の中にちりばめておきました(より詳しい説明が知りたくなったら，面倒がらずに教科書に戻ってください).
5. シェーマは推論の仕方を思い出しやすいように，みじかい言葉(こういう時はこう考えるという図式)で示したものです. 各自，自分なりの言葉でやり方を整理するのもいいでしょう.

数学においては，理論のもつ意味に注意しながら，**論理的思考力**と**思考の柔軟性**を養うことが大切です. そのために，この問題集で基礎を確認し，そこから，さらなる実戦的な問題に挑戦し，つねに未知なる世界をめざしてほしいと思います. その途上でくり返し立ち返る土台として，この問題集を使っていただければさいわいです.

目次

§６．数学と人間の活動（数A）

§７．図形の性質　（数A）

§８．データの分析　（数Ⅰ）

例題 001 因数分解

次の式を因数分解せよ.

(1) $x^2+xy-x-y$

(2) $6x^2+x-15$

(3) $2x^2-3xy-2y^2-5x+5y+3$

(4) $xyz+x^2y-xy^2-x+y-z$

(5) x^4+4

解 (1) $(\text{与式})=x(x+y)-(x+y)=\boldsymbol{(x+y)(x-1)}$

(2) $(\text{与式})=\boldsymbol{(2x-3)(3x+5)}$

$$\begin{array}{cccc} 2 & \diagdown\!\!\!\diagup\; -3 & \rightarrow & -9 \\ 3 & \quad\;\; 5 & \rightarrow & \underline{10} \\ & & & 1 \end{array}$$

(3) $(\text{与式})=2x^2-(3y+5)x-(y-3)(2y+1)$

$=\{2x+(y-3)\}\{x-(2y+1)\}$

$=\boldsymbol{(2x+y-3)(x-2y-1)}$

← x の２次式とみなす.

(4) $(\text{与式})=(xy-1)z+x^2y-xy^2-x+y$

$=(xy-1)z+xy(x-y)-(x-y)$

$=(xy-1)z+(xy-1)(x-y)$

$=\boldsymbol{(xy-1)(x-y+z)}$

← x, y は２次, z は１次であるから z について整理する.

(5) $(\text{与式})=(x^4+4x^2+4)-4x^2$

$=(x^2+2)^2-(2x)^2$

$=(x^2+2+2x)(x^2+2-2x)$

$=\boldsymbol{(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)}$

← A^2-B^2 の形に変形できることに注目.

← 乗法公式 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ を利用.

《乗法公式》

(i) $\boldsymbol{a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2}$ (複号同順)

(ii) $\boldsymbol{a^2-b^2=(a+b)(a-b)}$

(iii) $\boldsymbol{acx^2+(ad+bc)x+bd=(ax+b)(cx+d)}$

シェーマ

因数分解 ⇒

- ○ 共通因数でくくる
- ○ 公式を利用する
- ○ 最低次の文字で整理する

復習 | 001 次の式を因数分解せよ.

(1) $x^2y-2y-x+2xy^2$

(2) $24x^2-2x-15$

(3) $6x^2-5xy-6y^2-x-5y-1$

(4) $(x-3)(x+7)(x+2)^2+144$

(5) $x(y-z)^2+y(z-x)^2+z(x-y)^2+8xyz$

(6) $x^4-27x^2y^2+y^4$

例題 002　有理数

(1)　次の分数を小数で表せ．

(i) $\dfrac{3}{8}$　(ii) $\dfrac{2}{125}$　(iii) $\dfrac{29}{90}$　(iv) $\dfrac{4}{11}$　(v) $\dfrac{11}{74}$

(2)　次の循環小数を分数で表せ．

(i) $0.5\dot{3}$　(ii) $0.2\dot{4}\dot{1}$　(iii) $0.6\dot{5}7\dot{2}$

数と式

解 (1) (i) $\dfrac{3}{8}=\mathbf{0.375}$　(ii) $\dfrac{2}{125}=\mathbf{0.016}$　(iii) $\dfrac{29}{90}=\mathbf{0.3\dot{2}}$

(iv) $\dfrac{4}{11}=\mathbf{0.\dot{3}\dot{6}}$　(v) $\dfrac{11}{74}=\mathbf{0.1\dot{4}8\dot{6}}$

(2) (i) $r=0.5\dot{3}$ とおくと $10r=5.\dot{3}$ であるから

$10r-r=5.\dot{3}-0.5\dot{3}=4.8$　$\therefore$　$9r=4.8$

$5.\dot{3}=5.3333\cdots$
$0.5\dot{3}=0.5333\cdots$

$\therefore$　$r=\dfrac{48}{90}=\mathbf{\dfrac{8}{15}}$

(ii) $r=0.2\dot{4}\dot{1}$ とおくと $100r=24.1\dot{4}\dot{1}$ であるから

$100r-r=24.1\dot{4}\dot{1}-0.2\dot{4}\dot{1}=23.9$　$\therefore$　$99r=23.9$

$\therefore$　$r=\mathbf{\dfrac{239}{990}}$

(iii) $r=0.6\dot{5}7\dot{2}$ とおくと $1000r=657.2\dot{5}7\dot{2}$ であるから

$1000r-r=657.2\dot{5}7\dot{2}-0.6\dot{5}7\dot{2}=656.6$　$\therefore$　$999r=656.6$

$\therefore$　$r=\dfrac{6566}{9990}=\mathbf{\dfrac{3283}{4995}}$

《有理数》　整数 n と 0 でない整数 m を用いて分数 $\dfrac{m}{n}$ の形に表すことのできる数を有理数という．整数 m は $\dfrac{m}{1}$ と表せるので有理数である．また，それ以上約分できない分数を既約分数という．小数点以下の部分が限りなく続く小数を無限小数(そうでないときは有限小数)，同じ数の並びがくり返し現れる無限小数を循環小数という．

Assist

有理数では次のことが成り立つ．正の有理数は整数，有限小数，循環小数のいずれかで表せる．逆に，有限小数，循環小数は分数の形で表せる．

シェーマ

循環小数$(\underbrace{\dot{\square}\square\cdots\dot{\square}}_{k\text{コ}})$ ⟫ $\underbrace{100\cdots0}_{k\text{コ}}$倍したものと差をとる

復習 | 002　(1)　次の分数を小数で表せ．

(i) $\dfrac{5}{16}$　(ii) $\dfrac{7}{20}$　(iii) $\dfrac{22}{30}$　(iv) $\dfrac{14}{55}$　(v) $\dfrac{81}{37}$

(2)　次の循環小数を分数で表せ．

(i) $0.32\dot{6}$　(ii) $0.\dot{9}\dot{6}$　(iii) $0.1\dot{8}0\dot{4}$

例題 033 三角比の相互関係

(1) 鈍角 θ に対して $\sin\theta = \dfrac{4}{5}$ のとき，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ．

(2) $0° < \theta < 180°$，$\tan\theta = -3$ のとき，$\sin\theta$，$\cos\theta$ の値を求めよ．

解 (1) $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ より

$$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}$$

$90° < \theta < 180°$（θ は鈍角）であるから　$\cos\theta < 0$

よって　$\boldsymbol{\cos\theta = -\dfrac{3}{5}}$

← θ が鈍角という条件がなければ $\cos\theta = \pm\dfrac{3}{5}$ となり，1つには決まらない．

$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ より

$$\boldsymbol{\tan\theta} = \frac{\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = \boldsymbol{-\frac{4}{3}}$$

(2) $1 + \tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$ より

$$\frac{1}{\cos^2\theta} = 1 + (-3)^2 = 10 \qquad \therefore\ \cos^2\theta = \frac{1}{10}$$

$\tan\theta < 0$ であるから，$90° < \theta < 180°$ をみたし　$\cos\theta < 0$

よって　$\boldsymbol{\cos\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{10}}}$

また，$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ より

$$\boldsymbol{\sin\theta} = \cos\theta \cdot \tan\theta = \left(-\frac{1}{\sqrt{10}}\right) \cdot (-3) = \boldsymbol{\frac{3}{\sqrt{10}}}$$

《三角比の相互関係》

(i) $\boldsymbol{\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}}$　(ii) $\boldsymbol{\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1}$　(iii) $\boldsymbol{1 + \tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}}$

シェーマ

$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値 ≫ 1つがわかれば残りも求まる

復習 033　$0° < \theta < 180°$ とする．$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ のうち，1つが次のように与えられたとき，他の2つの値を求めよ．

(1) $\cos\theta = -\dfrac{4}{5}$　(2) $\tan\theta = 2$

例題 034　$\sin\theta$ と $\cos\theta$ の対称式

$\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}$ が成り立つとき，次の式の値を求めよ．

(1)　$\sin\theta\cos\theta$　　(2)　$\sin^3\theta+\cos^3\theta$　　(3)　$\sin^4\theta+\cos^4\theta$

解 (1)　$\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}$　……①　の両辺を 2 乗して

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta=2$$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ を代入して

$$1+2\sin\theta\cos\theta=2$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2}}\quad\cdots\cdots②$$

(2)　①，②より

$$\boldsymbol{\sin^3\theta+\cos^3\theta}$$
$$=(\sin\theta+\cos\theta)^3-3\sin\theta\cos\theta(\sin\theta+\cos\theta)$$
$$=(\sqrt{2})^3-3\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

← x^3+y^3
$=(x+y)^3-3xy(x+y)$

(3)　同様に

$$\boldsymbol{\sin^4\theta+\cos^4\theta}$$
$$=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^2-2(\sin\theta\cos\theta)^2$$
$$=1^2-2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

← x^4+y^4
$=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2$

Assist

(2)は

$$\sin^3\theta+\cos^3\theta=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$$
$$=\sqrt{2}\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

としてもよい．

シェーマ

$\sin\theta$ と $\cos\theta$ の対称式 ⟫ **和と積で表せる**
($\sin\theta+\cos\theta$ がわかれば
$\sin\theta\cos\theta$ も求まる)

復習 | 034　$\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{1}{3}$ が成り立つとき，次の式の値を求めよ．

(1)　$\sin\theta\cos\theta$

(2)　$\sin^3\theta-\cos^3\theta$

(3)　$\sin^5\theta-\cos^5\theta$

例題 073 最大公約数と最小公倍数

(1) 42，63，189 の最大公約数と最小公倍数を求めよ．
(2) 和が 756，最大公約数が 126 であるような 2 つの自然数を求めよ．
(3) 積が 864，最小公倍数が 144 であるような 2 つの自然数を求めよ．

解 (1) 各数を素因数分解すると

$$42=2\cdot3\cdot7,\quad 63=3^2\cdot7,\quad 189=3^3\cdot7$$

よって　最大公約数は　$3\cdot7=\mathbf{21}$

最小公倍数は　$2\cdot3^3\cdot7=\mathbf{378}$

←おのおのの素因数について最大公約数は，個数の一番少ないものをとる．最小公倍数は，個数の一番多いものをとる．

(2) 2 つの自然数を a，b $(a\leqq b)$ とすると，条件より，$a=126a'$，$b=126b'$ (a' と b' は自然数で，最大公約数が 1，$a'\leqq b'$) と表され，$a+b=756$ であるから

$$126a'+126b'=756 \qquad \therefore\quad a'+b'=6$$

a' と b' の最大公約数は 1 であるから　$(a',\ b')=(1,\ 5)$

←$(a',\ b')=(1,\ 5)$, $\underline{(2,\ 4),\ (3,\ 3)}$ ↑ これらは最大公約数が 1 ではない．

$$a=126,\quad b=630$$

よって　**126 と 630**

(3) 2 つの自然数を a，b $(a\leqq b)$ とし，その最大公約数を g とすると，最小公倍数が 144 であるから

$$ab=144g \qquad \therefore\quad 864=144g \qquad \therefore\quad g=6$$

よって，$a=6a'$，$b=6b'$ (a' と b' は自然数で，最大公約数が 1，$a'\leqq b'$) と表せ，$ab=864$ であるから

$$36a'b'=864 \qquad \therefore\quad a'b'=24$$

$$\therefore\quad (a',\ b')=(1,\ 24),\ (3,\ 8) \qquad \therefore\quad (a,\ b)=(6,\ 144),\ (18,\ 48)$$

したがって　**6 と 144**　または　**18 と 48**

Assist

用語の定義はしっかりおぼえておくことが大切である．
「2 つの整数 a，b に対して，$a=bk$ となる整数 k が存在するとき，a は b で割り切れるといい，$\boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{a}$ の約数，$\boldsymbol{a}$ は $\boldsymbol{b}$ の倍数という．2 つ以上の整数に共通の約数を，それらの公約数といい，そのうち最大の数を最大公約数という．2 つ以上の整数に共通の倍数を，それらの公倍数といい，そのうち最小の正の数を最小公倍数という．」

《最大公約数と最小公倍数》　a と b の最大公約数を g，最小公倍数を l とすると，
$\boldsymbol{a=a'g}$，$\boldsymbol{b=b'g}$ (a' と b' の最大公約数は 1) と表され　$\boldsymbol{l=a'b'g}$，　$\boldsymbol{gl=ab}$

シェーマ

公約数と公倍数 ≫ 素因数分解をして素因数の個数を比較

復習 073 (1) 75，360，420 の最大公約数と最小公倍数を求めよ．
(2) 最大公約数が 17 で，最小公倍数が 204 となる 2 桁の 2 つの自然数を求めよ．

例題 074 互いに素

(1) a, b は自然数，x, y は整数で，a と b は互いに素であるとする．
$\dfrac{x}{b}=\dfrac{y}{a}$ が成り立つとき，x は b で割り切れることを示せ．

(2) 「自然数 n と $n+1$ は互いに素である」ことを証明せよ．

解 (1) $\dfrac{x}{b}=\dfrac{y}{a}$ より　$ax=by$

これより，左辺の ax は b で割り切れる．

a と b は互いに素であるから，x は b で割り切れる．　終

(2) n と $n+1$ の最大公約数を g (g は自然数) とすると

$$n=ga,\ n+1=gb\quad (a,\ b \text{ は自然数で } a<b)$$

と表せる．このとき

$$(n+1)-n=gb-ga\qquad \therefore\quad g(b-a)=1$$

ここで，g, $b-a$ はともに自然数なので　$g=1$

よって，n と $n+1$ は互いに素である．　終

別解 n と $n+1$ が互いに素でないと仮定すると，n と $n+1$ は　← 背理法を用いる．
1 より大きい公約数 p をもち

$$n=pk,\ n+1=pl\quad (k,\ l \text{ は自然数})$$

と表される．このとき，辺々差をとると

$$1=pl-pk\qquad \therefore\quad 1=p(l-k)\quad \cdots\cdots①$$

一方，p は 1 より大きい自然数，$l-k$ は整数であるから

$$p(l-k)\neq 1\qquad \cdots\cdots②$$

①と②は矛盾する．よって，n と $n+1$ は互いに素である．　終

数学と人間の活動

Assist

1° 「a と b が互いに素である」とは，a と b の最大公約数が 1 であることをいう．これは，a と b が 1 以外の共通の約数をもたないことであり，素因数分解において共通の素因数をもたないことでもある．

2° (1)において，証明より，$x=bn$ (n は整数) と表され，$ax=by$ に代入して $y=an$ である．

つまり　$ax=by \iff \begin{cases} x=bn \\ y=an \end{cases}$　(n は整数)

シェーマ

互いに素 ≫ 1 以外の公約数をもたない

復習 | 074 (1) n は自然数とする．$2n+1$ が 7 の倍数で，$n+1$ が 3 の倍数であるとき，$2n+8$ が 42 の倍数であることを証明せよ．

(2) a を自然数とするとき，a^2 と $2a+1$ が互いに素であることを証明せよ．

§1 数と式

001

(1) (与式) $=(x^2y-x)+(2xy^2-2y)$

$=x(xy-1)+2y(xy-1)$

$=\boldsymbol{(xy-1)(x+2y)}$

(2) (与式) $=\boldsymbol{(4x+3)(6x-5)}$

(3) (与式) $=6x^2-(5y+1)x-(6y^2+5y+1)$

$=6x^2-(5y+1)x-(2y+1)(3y+1)$

$=\{2x-(3y+1)\}\{3x+(2y+1)\}$

$=\boldsymbol{(2x-3y-1)(3x+2y+1)}$

(4) (与式) $=(x^2+4x-21)(x^2+4x+4)+144$

$=(x^2+4x)^2-17(x^2+4x)+60$

$=(x^2+4x-5)(x^2+4x-12)$

$=\boldsymbol{(x-1)(x-2)(x+5)(x+6)}$

(5) (与式) $=x(y-z)^2+y(z^2-2zx+x^2)$

$+z(x^2-2xy+y^2)+8xyz$

$=(y+z)x^2+\{(y-z)^2-2yz$

$-2yz+8yz\}x+(yz^2+y^2z)$

$=(y+z)x^2+(y+z)^2x+yz(y+z)$

$=(y+z)\{x^2+(y+z)x+yz\}$

$=(y+z)(x+y)(x+z)$

$=\boldsymbol{(x+y)(y+z)(z+x)}$

(6) (与式) $=(x^4-2x^2y^2+y^4)-25x^2y^2$

$=(x^2-y^2)^2-(5xy)^2$

$=(x^2-y^2+5xy)(x^2-y^2-5xy)$

$=\boldsymbol{(x^2+5xy-y^2)(x^2-5xy-y^2)}$

002

(1) (i) $\dfrac{5}{16}=\mathbf{0.3125}$ (ii) $\dfrac{7}{20}=\mathbf{0.35}$

(iii) $\dfrac{22}{30}=\mathbf{0.7\dot{3}}$ (iv) $\dfrac{14}{55}=\mathbf{0.2\dot{5}\dot{4}}$

(v) $\dfrac{81}{37}=\mathbf{2.\dot{1}8\dot{9}}$

(2) (i) $r=0.32\dot{6}$ とおくと $10r=3.2\dot{6}$ であるから

$$\begin{cases}10r=3.26666\cdots\\ \ \ \ r=0.32666\cdots\end{cases}$$

よって

$10r-r=2.94$

$\therefore\ 9r=2.94$ $\therefore\ r=\dfrac{294}{900}=\boldsymbol{\dfrac{49}{150}}$

(ii) $r=0.\dot{9}\dot{6}$ とおくと $100r=96.\dot{9}\dot{6}$ であるから

$100r-r=96.\dot{9}\dot{6}-0.\dot{9}\dot{6}=96$

$\therefore\ 99r=96$ $\therefore\ r=\dfrac{96}{99}=\boldsymbol{\dfrac{32}{33}}$

(iii) $r=0.\dot{1}80\dot{4}$ とおくと $1000r=180.4\dot{8}0\dot{4}$ であるから

$1000r-r=180.4\dot{8}0\dot{4}-0.\dot{1}80\dot{4}$

$=180.3$

$\therefore\ 999r=180.3$

$\therefore\ r=\dfrac{1803}{9990}=\boldsymbol{\dfrac{601}{3330}}$

003

$$x+y=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$$

$$=\frac{(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2+(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})}$$

$=8$

$$xy=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=1$$

(1) (与式) $=3\{(x+y)^2-2xy\}-5xy$

$=3(x+y)^2-11xy$

$=3\cdot 8^2-11\cdot 1=192-11$

$=\mathbf{181}$

(2) (与式) $=x^2-4+xy+y^2$

$=(x+y)^2-xy-4$

$=8^2-1-4=\mathbf{59}$

(3) (与式) $=\dfrac{x^3+y^3}{xy}$

ここで

$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$

$=8^3-3\cdot 1\cdot 8=8(64-3)$

$=488$

よって (与式) $=\dfrac{488}{1}=\mathbf{488}$

004

(1) (i) $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{7}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}-\sqrt{7}}$

$$=\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{7})(\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{7})}{(\sqrt{2}+\sqrt{5}-\sqrt{7})(\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{7})}$$

$$=\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{7})^2}{(\sqrt{2}+\sqrt{5})^2-(\sqrt{7})^2}$$

$$=\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{7})^2}{2\sqrt{10}}$$

$$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{5}+\sqrt{7}}{\sqrt{2}-\sqrt{5}-\sqrt{7}}$$

(2) $\dfrac{1}{\cos^2\theta}=1+\tan^2\theta=1+4=5$

$\therefore\ \cos^2\theta=\dfrac{1}{5}$

$\tan\theta>0$ より $0^\circ<\theta<90^\circ$ であるから

$\cos\theta>0$

よって $\boldsymbol{\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{5}}}$

このとき

$\boldsymbol{\sin\theta}=\tan\theta\cos\theta=2\cdot\dfrac{1}{\sqrt{5}}\boldsymbol{=\dfrac{2}{\sqrt{5}}}$

034

(1) $\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{1}{3}$ の両辺を 2 乗して

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta-2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{9}$$

$\therefore\ 1-2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{9}$

$\therefore\ \sin\theta\cos\theta=\boldsymbol{\dfrac{4}{9}}$

(2) $(\sin\theta-\cos\theta)^3$

$=\sin^3\theta-3\sin^2\theta\cos\theta$
$\quad+3\sin\theta\cos^2\theta-\cos^3\theta$

より

$(\text{与式})=(\sin\theta-\cos\theta)^3$
$\quad+3\sin\theta\cos\theta(\sin\theta-\cos\theta)$

$=\left(\dfrac{1}{3}\right)^3+3\left(\dfrac{4}{9}\right)\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)=\boldsymbol{\dfrac{13}{27}}$

(3) $(\sin^3\theta-\cos^3\theta)(\sin^2\theta+\cos^2\theta)$

$=\sin^5\theta+\sin^3\theta\cos^2\theta$
$\quad-\sin^2\theta\cos^3\theta-\cos^5\theta$

$=(\sin^5\theta-\cos^5\theta)$
$\quad+\sin^2\theta\cos^2\theta(\sin\theta-\cos\theta)$

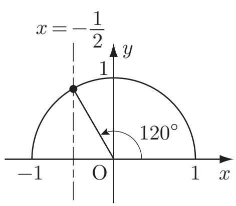
より

$(\text{与式})=(\sin^3\theta-\cos^3\theta)(\sin^2\theta+\cos^2\theta)$
$\quad-(\sin\theta\cos\theta)^2(\sin\theta-\cos\theta)$

$=\dfrac{13}{27}\cdot1-\left(\dfrac{4}{9}\right)^2\cdot\dfrac{1}{3}=\boldsymbol{\dfrac{101}{243}}$

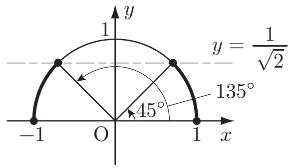
035

(1)



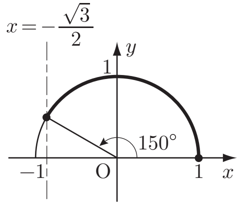
図より $\boldsymbol{\theta=120^\circ}$

(2)



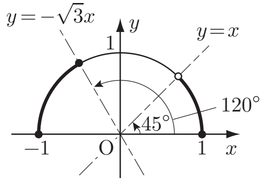
図より $\boldsymbol{0^\circ\leqq\theta\leqq45^\circ,\ 135^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ}$

(3)



図より $\boldsymbol{0^\circ\leqq\theta\leqq150^\circ}$

(4)



図より $\boldsymbol{0^\circ\leqq\theta<45^\circ,\ 120^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ}$

036

(1) (i) $\sin124^\circ=\sin(180^\circ-56^\circ)$

$=\sin56^\circ=\sin(90^\circ-34^\circ)$

$=\cos34^\circ$

よって $(\text{与式})=\cos^2 34^\circ+\sin^2 34^\circ=\boldsymbol{1}$

(ii) $\tan68^\circ=\tan(90^\circ-22^\circ)=\dfrac{1}{\tan22^\circ}$

$\tan147^\circ=\tan(180^\circ-33^\circ)=-\tan33^\circ$

$\sin57^\circ=\sin(90^\circ-33^\circ)=\cos33^\circ$

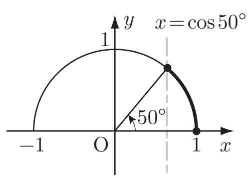
よって

$(\text{与式})=\tan22^\circ\cdot\dfrac{1}{\tan22^\circ}$
$\quad+\tan33^\circ\cdot(-\tan33^\circ)+\dfrac{1}{\cos^2 33^\circ}$

$=1+\left(\dfrac{1}{\cos^2 33^\circ}-\tan^2 33^\circ\right)$

$=1+1=\boldsymbol{2}$

(2) (i)



$P(T_R \cap S_R)$ は

$$\frac{4}{7} \times \frac{{}_4C_2}{{}_9C_2} = \frac{4 \cdot 6}{7 \cdot 36} = \frac{2}{21}$$

(1)より

$$P(T_R) = \frac{11}{84}$$

よって，求める確率は

$$P_{T_R}(S_R) = \frac{P(T_R \cap S_R)}{P(T_R)} = \frac{\frac{2}{21}}{\frac{11}{84}}$$

$$= \boldsymbol{\frac{8}{11}}$$

072

(1) 終わるまでの回数を k とする．小さいカードから順にとり出すと，
$1+2+3+4=10$ より 4 回で終わる．よって，k の範囲は

$$\boldsymbol{1 \leqq k \leqq 4}$$

(2) (i) 1 回で終わるのは，はじめに 10 をとり出すときで

$$p_1 = \frac{1}{10}$$

(ii) 2 回で終わるのは，1 回目の数字を i，2 回目の数字を j とすると

$i=1$ のとき
　$j=9$，10 の 2 通り
$i=2$ のとき
　$j=8$，9，10 の 3 通り
$i=3$ のとき
　$j=7$，8，9，10 の 4 通り
$i=4$ のとき
　$j=6$，7，8，9，10 の 5 通り
$i=5$ のとき
　$j=6$，7，8，9，10 の 5 通り
$i=6$ のとき
　$j=4$，5，7，8，9，10 の 6 通り

同様に $i=7$ のとき 7 通り，$i=8$ のとき 8 通りで，$i=9$ のとき 9 通り．
よって，$(i,\ j)$ の組は

$$2+3+4+5+5+6+7+8+9=49$$

であるから

$$p_2 = \frac{49}{{}_{10}P_2} = \frac{49}{90}$$

(iii) 4 回で終わるのは，3 回までの和が 9 以下で

{1, 2, 3}, {1, 2, 4}, {1, 2, 5},
{1, 2, 6}, {1, 3, 4}, {1, 3, 5},
{2, 3, 4}

の 7 通り（順番の決め方はおのおの 3! 通り）で，このときはつねに 4 回で終わるので

$$p_4 = \frac{7 \times 3!}{{}_{10}P_3} = \frac{7}{120}$$

(iv) 3 回で終わる場合は余事象を考えて，(i)～(iii)より

$$\begin{aligned} p_3 &= 1-(p_1+p_2+p_4) \\ &= 1-\frac{1}{10}-\frac{49}{90}-\frac{7}{120} \\ &= \frac{360-36-196-21}{360} = \frac{107}{360} \end{aligned}$$

よって

回数の期待値

$$\begin{aligned} &= 1 \times p_1 + 2 \times p_2 + 3 \times p_3 + 4 \times p_4 \\ &= 1 \cdot \frac{1}{10} + 2 \cdot \frac{49}{90} + 3 \cdot \frac{107}{360} + 4 \cdot \frac{7}{120} \\ &= \frac{36+392+321+84}{360} = \boldsymbol{\frac{833}{360}} \end{aligned}$$

§6 数学と人間の活動

073

(1) 　$75 = 3 \times 5^2$，$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$，
$420 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 7$

であるから，最大公約数は **15** $(=3 \times 5)$，
最小公倍数は **12600** $(=2^3 \times 3^2 \times 5^2 \times 7)$

(2) 2 つの自然数を a，b とすると，最大公約数が 17 であるから $a=17a'$，$b=17b'$（a' と b' は自然数で，最大公約数は 1，$a' \leqq b'$）と表せる．また，最小公倍数が 204 であるから

$$ab = 17 \times 204$$

$$\therefore\ (17a')(17b') = 17 \times 204$$

$$\therefore\ a'b' = 12$$

a，b とも 2 桁なので，a'，b' とも 1 以上 5 以下である．a' と b' の最大公約数が 1 であることから　$a'=3$，$b'=4$

よって，求める 2 つの自然数は　**51 と 68**

074

(1) 条件より

$$\left.\begin{aligned} 2n+1 &= 7k \quad \cdots\cdots ① \\ n+1 &= 3l \quad \cdots\cdots ② \end{aligned}\right\} (k,\ l \text{ は自然数})$$

と表される．