

物事にはすべて理由がある、というのが科学の考え方です。なかでも数学は「…の理由から…が成り立つ」という形の推論をつなげていく作業であると言ってよいでしょう。理論にしたがって推論をつなげていく作業。だからこそ、理論の基礎をしっかりと把握し、それをつなげて議論を進めていけるようにすることが大切です。この問題集は、基礎としてこれだけ知つていればよい、これだけ使えばよい、という必須事項の全体像をコンパクトに提示することを目的としました(そのため、「数学と人間の活動」の分野では、整数に関する問題だけを取り上げました)。基礎的なことで疑問を感じたら、教科書に立ち返ることも大切です。しかし、実際は、ここにあることを理解し、使えるようになれば、覚えてくり返すべき内容や形式としてはそれで十分でしょう(あとはそれを使って未知の問題にチャレンジすることが重要です。応用問題への道筋にも注意を払いました)。この問題集が、みなさんにとって、高校数学の基本を確認し、主要事項を使えるようになるための礎^{いしづえ}になることを願ってやみません。

この小さな問題集が出来るまでに多くの方々のお世話になりました。

編集の梶原一也さん、加藤達也さん、大坂美緒さんには大変なご苦労とご迷惑をおかけしました。ここにお礼とおわびを申し上げます。また、いまだ構想段階にあった数年前に背中を押してくれた吉井健二さん、校閲と貴重な助言をしていただいた小松崎和子先生、終盤、原稿に目を通して、気づかなかかった点を指摘してくれた小沢英雄先生、デザインとレイアウトを助けてくれた平井素子さん、改訂に際してご教示いただいた齋藤大成先生、編集の林拓実さん、前橋桂介さんに感謝の意を表します。そして、折々に著者の疑問に付き合ってくれた多くの先生方、職員の方々、どうもありがとうございます。

著者を代表して

桐山宣雄

本書の特長と利用法

実際の使い方としては

- ① まず**例題**を解いてみてください.
- ② それから**解答**を確認し、自分の今いる地点(実力)を確認してください
(問題は解けたか、言葉の意味は知っていたか、公式は覚えていたか、公式は使えたか、計算はできたか、などなど).
- ③ 例題が解けず、解答を読んだものについては、間をあけず**復習問題**を紙の上で解いてみてください(そのため多くの復習問題は例題と同程度の類題にとどめてあります). 真似て解いてみることも基礎を定着させるにはとても大切なことです.
- ④ 疑問がわいたら、計算については**傍注**、理論的な事についてはAssistを見ること. **公式**は基礎として重要な定理はおおよそ載せてあります. 必要に応じて、概念の約束である定義も傍注や公式の中にちりばめておきました(より詳しい説明が知りたくなったら、面倒がらずに教科書に戻ってください).
- ⑤ **ジョーラ**は推論の仕方を思い出しやすいように、みじかい言葉(こういう時はこう考えるという図式)で示したものです. 各自、自分なりの言葉でやり方を整理するのもいいでしょう.

数学においては、理論のもつ意味に注意しながら、論理的思考力と思考の柔軟性を養うことが大切です。そのために、この問題集で基礎を確認し、そこから、さらなる実戦的な問題に挑戦し、つねに未知なる世界をめざしてほしいと思います。その途上でくり返し立ち返る土台として、この問題集を使っていただければさいわいです。

目次

§ 1. 数と式

(数 I)

001. 因数分解	6
002. 有理数	7
003. 無理数と対称式	8
004. 2重根号・無理数の小数部分	9
005. 連立不等式	10
006. 絶対値の方程式と不等式	11

§ 2. 集合と命題

(数 I)

007. 集合と要素	12
008. 必要条件と十分条件	13
009. 条件・命題の否定	14
010. 命題の逆・裏・対偶	15
011. 無理数であることの証明	16

§ 3. 2次関数

(数 I)

012. 放物線のグラフ	17
013. 放物線の移動	18
014. 2次関数の決定	19
015. 2次関数の最大値・最小値①	20
016. 2次関数の最大値・最小値②	21
017. 2次関数の最大値・最小値③	22
018. x の2次式の2次式	23
019. 放物線と x 軸の共有点	24
020. 2次不等式①	25
021. 2次不等式②	26
022. 文字定数を含む2次不等式	27
023. 2次方程式の解の配置	28
024. x^2 の2次方程式の解の個数	29

025. 不等式がつねに成り立つ条件

..... 30

026. 2次不等式がつねに成り立つ条件

..... 31

027. 連立不等式が解をもつ条件

..... 32

028. 共通解

..... 33

029. 2変数関数の最大・最小①

..... 34

030. 2変数関数の最大・最小②

..... 35

031. 2変数関数の最大・最小③

..... 36

032. 絶対値を含む関数のグラフ

..... 37

§ 4. 図形と計量

(数 I)

033. 三角比の相互関係	38
034. $\sin \theta$ と $\cos \theta$ の対称式	39
035. 三角方程式・不等式	40
036. 三角比の計算	41
037. 三角比の関数	42
038. 正弦定理・余弦定理	43
039. 三角形と外接円・内接円の半径	44
040. 三角形の形状	45
041. 四角形と外接円	46
042. 測量の問題	47
043. 四面体の体積	48

§ 5. 場合の数と確率

(数 A)

044. 集合の要素の個数	49
045. 約数の個数	50
046. 5桁の整数	51
047. 男子と女子が1列に並ぶ	52
048. 円順列と首飾りの順列	53
049. 異なる数の組合せ	54
050. 人を組に分ける	55

051. 同じものを含む順列	56	079. ユークリッドの互除法	84
052. 区別のあるものを分ける	57	080. 不定方程式の整数解(1次)	85
053. 区別のないものを分ける	58	081. 不定方程式の整数解(2次)	86
054. 重複組合せ	59	082. 合同式	87
055. 数の組と大小関係	60	083. n 進法	88
056. 最短経路の数	61		
057. 三角形の個数	62		
058. 立方体に色を塗る	63		
059. 3個のサイコロを同時に投げる	64		
060. 袋から球を同時にとり出す確率	65	084. 重心と外心が一致する三角形	92
061. 和事象・積事象の確率	66	085. 三角形の最大角	93
062. 反復試行の確率	67	086. チェバの定理, メネラウスの定理	94
063. 先に4勝して優勝する確率	68		
064. 数直線上の動点の位置	69	087. 方べきの定理	95
065. サイコロの出た目の最大値	70	091. 2円の位置関係	96
066. 格子状の道の移動	71	092. 直交する平面と直線	97
067. 1回のジャンケンによる勝敗の確率	72	093. 正四面体の体積	98
		094. 正四面体の外接球	99
068. 4回のジャンケンで1人の勝者が決まる確率	73	095. 2平面のなす角	100
069. 確率を最大にする n を求める	74	096. オイラーの多面体定理	101
070. くじ引きの確率《非復元抽出》	75		
071. 条件付き確率	76	§ 8. データの分析 (数 I)	
072. 回数の期待値	77		
		097. データの代表値	102
		098. 四分位数と箱ひげ図	103
		099. 分散と標準偏差	104
		100. 相関関係	105
		101. 共分散と相関係数	106
		102. 仮説検定	107
		復習の答(結果のみ)	108
		自己チェック表	113

§ 6. 数学と人間の活動 (数 A)

073. 最大公約数と最小公倍数	78
074. 互いに素	79
075. 整数の割り算	80
076. 整数と整式	81
077. 平方の余り	82
078. 自然数の積と素因数の個数	83

§ 7. 図形の性質 (数 A)

084. 三角形の重心	89
085. 三角形の外心, 内心	90
086. チェバの定理, メネラウスの定理	91
087. 重心と外心が一致する三角形	92
088. 三角形の最大角	93
089. 円周角, 接線と弦の作る角	94
090. 方べきの定理	95
091. 2円の位置関係	96
092. 直交する平面と直線	97
093. 正四面体の体積	98
094. 正四面体の外接球	99
095. 2平面のなす角	100
096. オイラーの多面体定理	101

§ 8. データの分析 (数 I)

097. データの代表値	102
098. 四分位数と箱ひげ図	103
099. 分散と標準偏差	104
100. 相関関係	105
101. 共分散と相関係数	106
102. 仮説検定	107

復習の答(結果のみ)	108
自己チェック表	113

例題 001 因数分解

次の式を因数分解せよ。

- (1) $x^2 + xy - x - y$
- (2) $6x^2 + x - 15$
- (3) $2x^2 - 3xy - 2y^2 - 5x + 5y + 3$
- (4) $xyz + x^2y - xy^2 - x + y - z$
- (5) $x^4 + 4$

解 (1) (与式) $= x(x + y) - (x + y) = (x + y)(x - 1)$

(2) (与式) $= (2x - 3)(3x + 5)$

$$\begin{array}{r} 2 \\ \times 3 \\ \hline 6 \end{array}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad & (\text{与式}) = 2x^2 - (3y + 5)x - (y - 3)(2y + 1) \\ &= \{2x + (y - 3)\}\{x - (2y + 1)\} \\ &= (2x + y - 3)(x - 2y - 1) \end{aligned}$$

← x の2次式とみなす。

$$\begin{aligned} (4) \quad & (\text{与式}) = (xy - 1)z + x^2y - xy^2 - x + y \\ &= (xy - 1)z + xy(x - y) - (x - y) \\ &= (xy - 1)z + (xy - 1)(x - y) \\ &= (xy - 1)(x - y + z) \end{aligned}$$

← x, y は2次, z は1次であるから z について整理する。

$$\begin{aligned} (5) \quad & (\text{与式}) = (x^4 + 4x^2 + 4) - 4x^2 \\ &= (x^2 + 2)^2 - (2x)^2 \\ &= (x^2 + 2 + 2x)(x^2 + 2 - 2x) \\ &= (x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2) \end{aligned}$$

← $A^2 - B^2$ の形に変形できる
ことに注目。

← 乗法公式
 $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$
を利用。

《乗法公式》

(i) $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$ (複号同順)

(ii) $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

(iii) $acx^2 + (ad + bc)x + bd = (ax + b)(cx + d)$



因数分解 \Rightarrow ○ 共通因数でくくる
○ 公式を利用する
○ 最低次の文字で整理する

復習 | 001 次の式を因数分解せよ。

- (1) $x^2y - 2y - x + 2xy^2$
- (2) $24x^2 - 2x - 15$
- (3) $6x^2 - 5xy - 6y^2 - x - 5y - 1$
- (4) $(x - 3)(x + 7)(x + 2)^2 + 144$
- (5) $x(y - z)^2 + y(z - x)^2 + z(x - y)^2 + 8xyz$
- (6) $x^4 - 27x^2y^2 + y^4$

例題 002 有理数

(1) 次の分数を小数で表せ.

$$(i) \frac{3}{8} \quad (ii) \frac{2}{125} \quad (iii) \frac{29}{90} \quad (iv) \frac{4}{11} \quad (v) \frac{11}{74}$$

(2) 次の循環小数を分数で表せ.

$$(i) 0.5\dot{3} \quad (ii) 0.2\dot{4}\dot{1} \quad (iii) 0.65\dot{7}\dot{2}$$

解 (1) (i) $\frac{3}{8} = 0.375$ (ii) $\frac{2}{125} = 0.016$ (iii) $\frac{29}{90} = 0.3\dot{2}$

(iv) $\frac{4}{11} = 0.3\dot{6}$ (v) $\frac{11}{74} = 0.1\dot{4}8\dot{6}$

(2) (i) $r = 0.5\dot{3}$ とおくと $10r = 5.\dot{3}$ であるから

$$10r - r = 5.\dot{3} - 0.5\dot{3} = 4.8 \quad \therefore 9r = 4.8$$

$$\therefore r = \frac{48}{90} = \frac{8}{15}$$

$$\left| \begin{array}{l} 5.\dot{3} = 5.3333\dots \\ 0.5\dot{3} = 0.5333\dots \end{array} \right.$$

(ii) $r = 0.2\dot{4}\dot{1}$ とおくと $100r = 24.1\dot{4}\dot{1}$ であるから

$$100r - r = 24.1\dot{4}\dot{1} - 0.2\dot{4}\dot{1} = 23.9 \quad \therefore 99r = 23.9$$

$$\therefore r = \frac{239}{990}$$

(iii) $r = 0.65\dot{7}\dot{2}$ とおくと $1000r = 657.2\dot{5}\dot{7}\dot{2}$ であるから

$$1000r - r = 657.2\dot{5}\dot{7}\dot{2} - 0.65\dot{7}\dot{2} = 656.6 \quad \therefore 999r = 656.6$$

$$\therefore r = \frac{6566}{9990} = \frac{3283}{4995}$$

《有理数》 整数 n と 0 でない整数 m を用いて分数 $\frac{m}{n}$ の形に表すことのできる数を有理数という。整数 m は $\frac{m}{1}$ と表せるので有理数である。また、それ以上約分できない分数を既約分数という。小数点以下の部分が限りなく続く小数を無限小数(そうでないときは有限小数)、同じ数の並びがくり返し現れる無限小数を循環小数という。

Assist

有理数では次のことが成り立つ。正の有理数は整数、有限小数、循環小数のいずれかで表せる。逆に、有限小数、循環小数は分数の形で表せる。



循環小数($\overbrace{\square\square\dots\square}^k$) \Rightarrow $\underbrace{100\dots0}_{k\square}$ 倍したものと差をとる

復習 | 002 (1) 次の分数を小数で表せ。

$$(i) \frac{5}{16} \quad (ii) \frac{7}{20} \quad (iii) \frac{22}{30} \quad (iv) \frac{14}{55} \quad (v) \frac{81}{37}$$

(2) 次の循環小数を分数で表せ。

$$(i) 0.32\dot{6} \quad (ii) 0.9\dot{6} \quad (iii) 0.180\dot{4}$$

例題 033 三角比の相互関係

- (1) 鈍角 θ に対して $\sin \theta = \frac{4}{5}$ のとき, $\cos \theta$, $\tan \theta$ の値を求めよ.
 (2) $0^\circ < \theta < 180^\circ$, $\tan \theta = -3$ のとき, $\sin \theta$, $\cos \theta$ の値を求めよ.

解 (1) $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ より

$$\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}$$

$90^\circ < \theta < 180^\circ$ (θ は鈍角) であるから $\cos \theta < 0$

よって $\cos \theta = -\frac{3}{5}$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \text{ より}$$

$$\tan \theta = \frac{\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3}$$

(2) $1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$ より

$$\frac{1}{\cos^2 \theta} = 1 + (-3)^2 = 10 \quad \therefore \cos^2 \theta = \frac{1}{10}$$

$\tan \theta < 0$ であるから, $90^\circ < \theta < 180^\circ$ をみたし $\cos \theta < 0$

よって $\cos \theta = -\frac{1}{\sqrt{10}}$

また, $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ より

$$\sin \theta = \cos \theta \cdot \tan \theta = \left(-\frac{1}{\sqrt{10}} \right) \cdot (-3) = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

θ が鈍角という条件がなければ
 $\cos \theta = \pm \frac{3}{5}$ となり, 1つには
 決まらない.

《三角比の相互関係》

$$(i) \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \quad (ii) \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \quad (iii) 1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$



$\sin \theta$, $\cos \theta$, $\tan \theta$ の値 \Rightarrow 1つがわかれれば残りも求まる

復習 | 033 $0^\circ < \theta < 180^\circ$ とする. $\sin \theta$, $\cos \theta$, $\tan \theta$ のうち, 1つが次のように与えられたとき, 他の2つの値を求めよ.

(1) $\cos \theta = -\frac{4}{5}$ (2) $\tan \theta = 2$

例題 034 $\sin \theta$ と $\cos \theta$ の対称式

$\sin \theta + \cos \theta = \sqrt{2}$ が成り立つとき、次の式の値を求めよ。

(1) $\sin \theta \cos \theta$ (2) $\sin^3 \theta + \cos^3 \theta$ (3) $\sin^4 \theta + \cos^4 \theta$

解 (1) $\sin \theta + \cos \theta = \sqrt{2}$ ……① の両辺を 2乗して

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta = 2$$

$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ を代入して

$$1 + 2 \sin \theta \cos \theta = 2$$

$$\therefore \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2} \quad \text{……②}$$

(2) ①, ②より

$$\sin^3 \theta + \cos^3 \theta$$

$$= (\sin \theta + \cos \theta)^3 - 3 \sin \theta \cos \theta (\sin \theta + \cos \theta)$$

$$= (\sqrt{2})^3 - 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\left. \begin{aligned} &x^3 + y^3 \\ &= (x+y)^3 - 3xy(x+y) \end{aligned} \right\}$$

(3) 同様に

$$\sin^4 \theta + \cos^4 \theta$$

$$= (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)^2 - 2(\sin \theta \cos \theta)^2$$

$$= 1^2 - 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{2}$$

$$\left. \begin{aligned} &x^4 + y^4 \\ &= (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 \end{aligned} \right\}$$

Assist

(2) は

$$\begin{aligned} \sin^3 \theta + \cos^3 \theta &= (\sin \theta + \cos \theta)(\sin^2 \theta - \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta) \\ &= \sqrt{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

としてもよい。

ショートカット

$\sin \theta$ と $\cos \theta$ の対称式 \Rightarrow 和と積で表せる
($\sin \theta + \cos \theta$ がわかれば
 $\sin \theta \cos \theta$ も求まる)

復習 | 034 $\sin \theta - \cos \theta = \frac{1}{3}$ が成り立つとき、次の式の値を求めよ。

(1) $\sin \theta \cos \theta$

(2) $\sin^3 \theta - \cos^3 \theta$

(3) $\sin^5 \theta - \cos^5 \theta$

例題 073 最大公約数と最小公倍数

- (1) 42, 63, 189 の最大公約数と最小公倍数を求めよ.
- (2) 和が 756, 最大公約数が 126 であるような 2 つの自然数を求めよ.
- (3) 積が 864, 最小公倍数が 144 であるような 2 つの自然数を求めよ.

解 (1) 各数を素因数分解すると

$$42 = 2 \cdot 3 \cdot 7, \quad 63 = 3^2 \cdot 7, \quad 189 = 3^3 \cdot 7$$

よって 最大公約数は $3 \cdot 7 = 21$

$$\text{最小公倍数は } 2 \cdot 3^3 \cdot 7 = 378$$

おののの素因数について
最大公約数は、個数の一番
少ないものをとる.
最小公倍数は、個数の一番
多いものをとる.

- (2) 2 つの自然数を $a, b (a \leq b)$ とすると、条件より、 $a = 126a'$, $b = 126b'$ (a' と b' は自然数で、最大公約数が 1, $a' \leq b'$) と表され、 $a + b = 756$ であるから

$$126a' + 126b' = 756 \quad \therefore a' + b' = 6$$

a' と b' の最大公約数は 1 であるから $(a', b') = (1, 5)$

$$a = 126, \quad b = 630$$

よって **126** と **630**

$(a', b') = (1, 5),$
 $\underline{(2, 4), (3, 3)}$
 \uparrow
 これらは最大公約数
が 1 ではない.

- (3) 2 つの自然数を $a, b (a \leq b)$ とし、その最大公約数を g

とすると、最小公倍数が 144 であるから

$$ab = 144g \quad \therefore 864 = 144g \quad \therefore g = 6$$

よって、 $a = 6a'$, $b = 6b'$ (a' と b' は自然数で、最大公約数が 1, $a' \leq b'$) と表せ、 $ab = 864$ であるから

$$36a'b' = 864 \quad \therefore a'b' = 24$$

$$\therefore (a', b') = (1, 24), (3, 8) \quad \therefore (a, b) = (6, 144), (18, 48)$$

したがって **6** と **144** または **18** と **48**

Assist

用語の定義はしっかりおぼえておくことが大切である。

「2 つの整数 a, b に対して、 $a = bk$ となる整数 k が存在するとき、 a は b で割り切れるといい、 b は a の約数、 a は b の倍数という。2 つ以上の整数に共通の約数を、それらの公約数といい、そのうち最大の数を最大公約数という。2 つ以上の整数に共通の倍数を、それらの公倍数といい、そのうち最小の正の数を最小公倍数という。」

《最大公約数と最小公倍数》 a と b の最大公約数を g 、最小公倍数を l とすると、
 $a = a'g$, $b = b'g$ (a' と b' の最大公約数は 1) と表され $l = a'b'g$, $gl = ab$



公約数と公倍数 \Rightarrow 素因数分解をして素因数の個数を比較

復習 | 073 (1) 75, 360, 420 の最大公約数と最小公倍数を求めよ。

(2) 最大公約数が 17 で、最小公倍数が 204 となる 2 衡の 2 つの自然数を求めよ。

例題 074

互いに素

(1) a, b は自然数, x, y は整数で, a と b は互いに素であるとする.

$\frac{x}{b} = \frac{y}{a}$ が成り立つとき, x は b で割り切れることを示せ.

(2) 「自然数 n と $n+1$ は互いに素である」ことを証明せよ.

解 (1) $\frac{x}{b} = \frac{y}{a}$ より $ax = by$

これより, 左辺の ax は b で割り切れる.

a と b は互いに素であるから, x は b で割り切れる.

終

(2) n と $n+1$ の最大公約数を g (g は自然数) とすると

$$n = ga, n+1 = gb \quad (a, b \text{ は自然数で } a < b)$$

と表せる. このとき

$$(n+1) - n = gb - ga \quad \therefore g(b-a) = 1$$

ここで, $g, b-a$ はともに自然数なので $g = 1$

よって, n と $n+1$ は互いに素である.

終

別解 n と $n+1$ が互いに素でないと仮定すると, n と $n+1$ は ← 背理法を用いる.

1 より大きい公約数 p をもち

$$n = pk, n+1 = pl \quad (k, l \text{ は自然数})$$

と表される. このとき, 遅々差をとると

$$1 = pl - pk \quad \therefore 1 = p(l-k) \quad \cdots \cdots ①$$

一方, p は 1 より大きい自然数, $l-k$ は整数であるから

$$p(l-k) \neq 1 \quad \cdots \cdots ②$$

①と②は矛盾する. よって, n と $n+1$ は互いに素である.

終

Assist

1° 「 a と b が互いに素である」とは, a と b の最大公約数が 1 であることをいう. これは, a と b が 1 以外の共通の約数をもたないことであり, 素因数分解において共通の素因数をもたないことでもある.

2° (1)において, 証明より, $x = bn$ (n は整数) と表され, $ax = by$ に代入して $y = an$ である.

$$\text{つまり } ax = by \iff \begin{cases} x = bn \\ y = an \end{cases} \quad (n \text{ は整数})$$



互いに素 ➔ 1 以外の公約数をもたない

復習 | 074

(1) n は自然数とする. $2n+1$ が 7 の倍数で, $n+1$ が 3 の倍数であるとき, $2n+8$ が 42 の倍数であることを証明せよ.

(2) a を自然数とするとき, a^2 と $2a+1$ が互いに素であることを証明せよ.

§1 数と式

001

$$\begin{aligned}
 (1) \quad (\text{与式}) &= (x^2y - x) + (2xy^2 - 2y) \\
 &= x(xy - 1) + 2y(xy - 1) \\
 &= (xy - 1)(x + 2y) \\
 (2) \quad (\text{与式}) &= (4x + 3)(6x - 5) \\
 (3) \quad (\text{与式}) &= 6x^2 - (5y + 1)x - (6y^2 + 5y + 1) \\
 &= 6x^2 - (5y + 1)x - (2y + 1)(3y + 1) \\
 &= \{2x - (3y + 1)\}\{3x + (2y + 1)\} \\
 &= (2x - 3y - 1)(3x + 2y + 1) \\
 (4) \quad (\text{与式}) &= (x^2 + 4x - 21)(x^2 + 4x + 4) + 144 \\
 &= (x^2 + 4x)^2 - 17(x^2 + 4x) + 60 \\
 &= (x^2 + 4x - 5)(x^2 + 4x - 12) \\
 &= (x - 1)(x - 2)(x + 5)(x + 6) \\
 (5) \quad (\text{与式}) &= x(y - z)^2 + y(z^2 - 2zx + x^2) \\
 &\quad + z(x^2 - 2xy + y^2) + 8xyz \\
 &= (y + z)x^2 + \{(y - z)^2 - 2yz \\
 &\quad - 2yz + 8yz\}x + (yz^2 + y^2z) \\
 &= (y + z)x^2 + (y + z)^2x + yz(y + z) \\
 &= (y + z)\{x^2 + (y + z)x + yz\} \\
 &= (y + z)(x + y)(x + z) \\
 &= (x + y)(y + z)(z + x) \\
 (6) \quad (\text{与式}) &= (x^4 - 2x^2y^2 + y^4) - 25x^2y^2 \\
 &= (x^2 - y^2)^2 - (5xy)^2 \\
 &= (x^2 - y^2 + 5xy)(x^2 - y^2 - 5xy) \\
 &= (x^2 + 5xy - y^2)(x^2 - 5xy - y^2)
 \end{aligned}$$

002

$$\begin{aligned}
 (1) \quad (i) \quad \frac{5}{16} &= 0.3125 \quad (ii) \quad \frac{7}{20} = 0.35 \\
 (iii) \quad \frac{22}{30} &= 0.7\dot{3} \quad (iv) \quad \frac{14}{55} = 0.2\dot{5}\dot{4} \\
 (v) \quad \frac{81}{37} &= 2.18\dot{9}
 \end{aligned}$$

(2) (i) $r = 0.32\dot{6}$ とおくと $10r = 3.2\dot{6}$ であるから

$$\left\{
 \begin{array}{l}
 10r = 3.26666\cdots \\
 r = 0.32666\cdots
 \end{array}
 \right.$$

よって

$$10r - r = 2.94$$

$$\therefore 9r = 2.94 \quad \therefore r = \frac{294}{900} = \frac{49}{150}$$

(ii) $r = 0.9\dot{6}$ とおくと $100r = 96.\dot{9}\dot{6}$ であるから

$$100r - r = 96.\dot{9}\dot{6} - 0.\dot{9}\dot{6} = 96$$

$$\therefore 99r = 96 \quad \therefore r = \frac{96}{99} = \frac{32}{33}$$

(iii) $r = 0.18\dot{04}$ とおくと $1000r = 180.48\dot{04}$ であるから

$$1000r - r = 180.48\dot{04} - 0.18\dot{04}$$

$$= 180.3$$

$$\therefore 999r = 180.3$$

$$\therefore r = \frac{1803}{9990} = \frac{601}{3330}$$

003

$$\begin{aligned}
 x + y &= \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} \\
 &= \frac{(\sqrt{5} - \sqrt{3})^2 + (\sqrt{5} + \sqrt{3})^2}{(\sqrt{5} + \sqrt{3})(\sqrt{5} - \sqrt{3})} \\
 &= 8
 \end{aligned}$$

$$xy = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} = 1$$

$$\begin{aligned}
 (1) \quad (\text{与式}) &= 3\{(x + y)^2 - 2xy\} - 5xy \\
 &= 3(x + y)^2 - 11xy \\
 &= 3 \cdot 8^2 - 11 \cdot 1 = 192 - 11 \\
 &= 181
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad (\text{与式}) &= x^2 - 4 + xy + y^2 \\
 &= (x + y)^2 - xy - 4 \\
 &= 8^2 - 1 - 4 = 59
 \end{aligned}$$

$$(3) \quad (\text{与式}) = \frac{x^3 + y^3}{xy}$$

ここで

$$\begin{aligned}
 x^3 + y^3 &= (x + y)^3 - 3xy(x + y) \\
 &= 8^3 - 3 \cdot 1 \cdot 8 = 8(64 - 3) \\
 &= 488
 \end{aligned}$$

$$\text{よって } (\text{与式}) = \frac{488}{1} = 488$$

004

$$\begin{aligned}
 (1) \quad (i) \quad &\frac{\sqrt{2} + \sqrt{5} + \sqrt{7}}{\sqrt{2} + \sqrt{5} - \sqrt{7}} \\
 &= \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{5} + \sqrt{7})(\sqrt{2} + \sqrt{5} + \sqrt{7})}{(\sqrt{2} + \sqrt{5} - \sqrt{7})(\sqrt{2} + \sqrt{5} + \sqrt{7})} \\
 &= \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{5} + \sqrt{7})^2}{(\sqrt{2} + \sqrt{5})^2 - (\sqrt{7})^2} \\
 &= \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{5} + \sqrt{7})^2}{2\sqrt{10}} \\
 &\quad \frac{\sqrt{2} - \sqrt{5} + \sqrt{7}}{\sqrt{2} - \sqrt{5} - \sqrt{7}}
 \end{aligned}$$

$$(2) \frac{1}{\cos^2 \theta} = 1 + \tan^2 \theta = 1 + 4 = 5$$

$$\therefore \cos^2 \theta = \frac{1}{5}$$

$\tan \theta > 0$ より $0^\circ < \theta < 90^\circ$ であるから
 $\cos \theta > 0$

$$\text{よって } \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

このとき

$$\sin \theta = \tan \theta \cos \theta = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

034

$$(1) \sin \theta - \cos \theta = \frac{1}{3} \text{ の両辺を 2 乗して}$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{9}$$

$$\therefore 1 - 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{9}$$

$$\therefore \sin \theta \cos \theta = \frac{4}{9}$$

$$(2) (\sin \theta - \cos \theta)^3 \\ = \sin^3 \theta - 3 \sin^2 \theta \cos \theta \\ + 3 \sin \theta \cos^2 \theta - \cos^3 \theta$$

より

$$\begin{aligned} (\text{与式}) &= (\sin \theta - \cos \theta)^3 \\ &\quad + 3 \sin \theta \cos \theta (\sin \theta - \cos \theta) \\ &= \left(\frac{1}{3}\right)^3 + 3\left(\frac{4}{9}\right) \cdot \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{13}{27} \end{aligned}$$

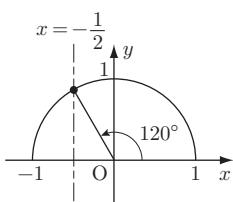
$$(3) (\sin^3 \theta - \cos^3 \theta)(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) \\ = \sin^5 \theta + \sin^3 \theta \cos^2 \theta \\ - \sin^2 \theta \cos^3 \theta - \cos^5 \theta \\ = (\sin^5 \theta - \cos^5 \theta) \\ + \sin^2 \theta \cos^2 \theta (\sin \theta - \cos \theta)$$

より

$$\begin{aligned} (\text{与式}) &= (\sin^3 \theta - \cos^3 \theta)(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) \\ &\quad - (\sin \theta \cos \theta)^2 (\sin \theta - \cos \theta) \\ &= \frac{13}{27} \cdot 1 - \left(\frac{4}{9}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{101}{243} \end{aligned}$$

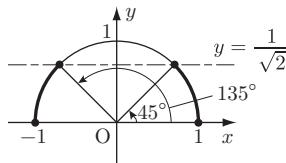
035

(1)



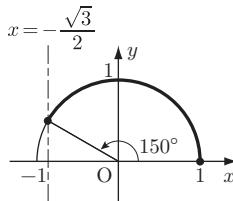
図より $\theta = 120^\circ$

(2)



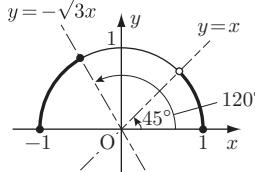
図より $0^\circ \leq \theta \leq 45^\circ, 135^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$

(3)



図より $0^\circ \leq \theta \leq 150^\circ$

(4)



図より $0^\circ \leq \theta < 45^\circ, 120^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$

036

$$(1) \begin{aligned} (i) \sin 124^\circ &= \sin(180^\circ - 56^\circ) \\ &= \sin 56^\circ = \sin(90^\circ - 34^\circ) \\ &= \cos 34^\circ \end{aligned}$$

$$\text{よって (与式)} = \cos^2 34^\circ + \sin^2 34^\circ = 1$$

$$(ii) \tan 68^\circ = \tan(90^\circ - 22^\circ) = \frac{1}{\tan 22^\circ}$$

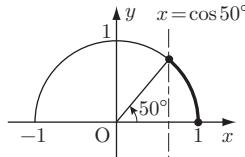
$$\tan 147^\circ = \tan(180^\circ - 33^\circ) = -\tan 33^\circ$$

$$\sin 57^\circ = \sin(90^\circ - 33^\circ) = \cos 33^\circ$$

よって

$$\begin{aligned} (\text{与式}) &= \tan 22^\circ \cdot \frac{1}{\tan 22^\circ} \\ &\quad + \tan 33^\circ \cdot (-\tan 33^\circ) + \frac{1}{\cos^2 33^\circ} \\ &= 1 + \left(\frac{1}{\cos^2 33^\circ} - \tan^2 33^\circ \right) \\ &= 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$

(2) (i)



$P(T_R \cap S_R)$ は

$$\frac{4}{7} \times \frac{4C_2}{9C_2} = \frac{4 \cdot 6}{7 \cdot 36} = \frac{2}{21}$$

(1)より

$$P(T_R) = \frac{11}{84}$$

よって、求める確率は

$$\begin{aligned} P_{T_R}(S_R) &= \frac{P(T_R \cap S_R)}{P(T_R)} = \frac{\frac{2}{21}}{\frac{11}{84}} \\ &= \frac{8}{11} \end{aligned}$$

072

(1) 終わるまでの回数を k とする。小さいカードから順にとり出すと、

$1 + 2 + 3 + 4 = 10$ より 4 回で終わる。よって、 k の範囲は

$$1 \leq k \leq 4$$

(2) (i) 1 回で終わるのは、はじめに 10 をとり出すときで

$$p_1 = \frac{1}{10}$$

(ii) 2 回で終わるのは、1 回目の数字を i 、2 回目の数字を j すると

$$i = 1 \text{ のとき}$$

$$j = 9, 10 \text{ の } 2 \text{ 通り}$$

$$i = 2 \text{ のとき}$$

$$j = 8, 9, 10 \text{ の } 3 \text{ 通り}$$

$$i = 3 \text{ のとき}$$

$$j = 7, 8, 9, 10 \text{ の } 4 \text{ 通り}$$

$$i = 4 \text{ のとき}$$

$$j = 6, 7, 8, 9, 10 \text{ の } 5 \text{ 通り}$$

$$i = 5 \text{ のとき}$$

$$j = 6, 7, 8, 9, 10 \text{ の } 5 \text{ 通り}$$

$$i = 6 \text{ のとき}$$

$$j = 4, 5, 7, 8, 9, 10 \text{ の } 6 \text{ 通り}$$

同様に $i = 7$ のとき 7 通り、 $i = 8$ のとき 8 通りで、 $i = 9$ のとき 9 通り。

よって、 (i, j) の組は

$$2 + 3 + 4 + 5 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 49$$

であるから

$$p_2 = \frac{49}{10P_2} = \frac{49}{90}$$

(iii) 4 回で終わるのは、3 回までの和が 9 以下で

$$\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 5\},$$

$$\{1, 2, 6\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 3, 5\},$$

$$\{2, 3, 4\}$$

の 7 通り(順番の決め方はおののおの 3! 通り)

で、このときはつねに 4 回で終わるので

$$p_4 = \frac{7 \times 3!}{10P_3} = \frac{7}{120}$$

(iv) 3 回で終わる場合は余事象を考えて、(i)

~(iii)より

$$p_3 = 1 - (p_1 + p_2 + p_4)$$

$$= 1 - \frac{1}{10} - \frac{49}{90} - \frac{7}{120}$$

$$= \frac{360 - 36 - 196 - 21}{360} = \frac{107}{360}$$

よって

回数の期待値

$$= 1 \times p_1 + 2 \times p_2 + 3 \times p_3 + 4 \times p_4$$

$$= 1 \cdot \frac{1}{10} + 2 \cdot \frac{49}{90} + 3 \cdot \frac{107}{360} + 4 \cdot \frac{7}{120}$$

$$= \frac{36 + 392 + 321 + 84}{360} = \frac{833}{360}$$

06 数学と人間の活動

073

$$(1) \quad 75 = 3 \times 5^2, \quad 360 = 2^3 \times 3^2 \times 5,$$

$$420 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 7$$

であるから、最大公約数は 15 ($= 3 \times 5$)、最小公倍数は 12600 ($= 2^3 \times 3^2 \times 5^2 \times 7$)

(2) 2 つの自然数を a, b とすると、最大公約数が 17 であるから $a = 17a'$, $b = 17b'$ (a' と b' は自然数で、最大公約数は 1, $a' \leq b'$) と表せる。また、最小公倍数が 204 であるから

$$ab = 17 \times 204$$

$$\therefore (17a')(17b') = 17 \times 204$$

$$\therefore a'b' = 12$$

a, b とも 2 桁なので、 a', b' とも 1 以上 5 以下である。 a' と b' の最大公約数が 1 であることから $a' = 3, b' = 4$

よって、求める 2 つの自然数は 51 と 68

074

(1) 条件より

$$2n + 1 = 7k \quad \cdots \cdots ① \quad (k, l \text{ は自然数})$$

$$n + 1 = 3l \quad \cdots \cdots ②$$

と表される。