はじめに

本書のねらい

本書では，近年の数学Ⅰ・数学 A・数学Ⅱ・数学 B・数学 C（以下数Ⅰ AⅡ B C と略記．ただし数学 B は「数列」と「統計的な推測」(期待値の計算まで)，数学 C は「ベクトル」のみ）の入試問題から 45 問を選び，それをネタに数 Ⅰ AⅡ B C について解説します．レベルは入試問題における標準からやや難といわれるものです．誰でも解けるような易問でもなく，誰もが解けないような難問珍問奇問ではありません．いわゆる出来不出来が合否を分ける問題を厳選しました．

数Ⅰ AⅡ B C の分野は習得すべき公式や定石，ルールなどがたくさんあります．体験すべき有名な問題や頻出の内容もあります．そこで本書のねらいは，教科書レベルを卒業した諸君に数Ⅰ AⅡ B C 攻略の武器を与え，思考する道具を伝授することです．この本を卒業した暁には，どんどん他の入試問題を解きたいと思ってもらえることでしょう．厳しい道のりですが，さあとりあえず一問解いてみましょう．

本書の構成

第Ⅰ部は問題編です．まずここを見て自分なりの解答を作ってみましょう．このとき計算はきちんと最後まで実行してください．立式はあってるから計算は省略とか，計算は間違ったが方針はあっていたから大丈夫だという勉強をしていては駄目です．こういう勉強をしているとあっという間に計算力が落ちてしまい，入試の本番で計算ミスが命取りになって不合格というこ

とになりかねません．それに実は計算に大きな山場が隠れている問題もあります．なので入試の会場にいるつもりで解答を作ってみて下さい．

第 II 部は解答・解説編です．解答を作ろうとしてもまったく手が出ないときは，アプローチを読んでみましょう．そしてもう一度考え直してみて下さい．これでもわからないときは 解答，フォローアップ を読みましょう．ここでもし答え (結果) が合っていたとしても必ず隅から隅まで読んで下さい．それは答えが出ても議論の仕方がよくないとか厳密ではないことなどがありえるからです．必ず自分の答案と比較してみましょう．

アプローチ，フォローアップ にある例題は見るだけではなく，これも鉛筆を動かして答えを導いてください．本書の最大の特徴は一問を一問で終わらせない解説です．本問に入る前のウォーミングアップになるような例題であったり，本問の内容を横に広げるような類題であったり，本問の奥行きを深めるような一般化であったり，一緒に学習すると本問の理解が深まり記憶に残りやすくするための参考問題であったり．ひとつの問題を解くことによって，その周辺の問題の何問分にもなるように解説をつけました．ですから一問の学習が他の問題集より大変かもしれません．この問題集を仕上げるのに問題数以上に時間がかかるかもしれません．牛歩ではありますが，これが完全攻略への王道なのです．

本書の利用法

●数 I A II B C の履修後の自宅学習として …… 1 週間に 5 問ずつで約 2 か月で完成できます．莫大な量ではないのでヤル気を削ぐことなく，無理のない量で学習を継続維持させることができます．

●長期休みの課題として数 I A II B C を復習 …… 分量的には，この本に没頭すれば一週間で仕上げることができるでしょう．たった一週間でパワーアップした自分に驚くことになるでしょう．

●大学入学共通テスト後に 2 次学力 (記述式) の感覚を取り戻す …… リサーチを待っている間や志望校決定に時間を費やしている間にこの一冊を終わらせます．ちょうどこの本を卒業する頃には，過去問演習に入る時期になるでしょう．二次学力が戻ってくれば難なく過去問対策もできます．

最後に一言

本書はひとつの問題に対する解答解説に 3 ページ以上を割いています．一問を一問で終わらせない内容を盛り込んだつもりです．何度もかみしめながら学習するのに耐えうる詳しさと内容の深さだと考えています．皆さんの大学合格への強力なバックアップができることを願っています．

末筆ではありますが，本書の企画に賛同していただいた元駿台文庫の中塚圭介氏並びに現駿台文庫の加藤達也氏をはじめとする編集部の方々，校正や内容チェックで支援をいただいた駿台予備学校講師の井辺卓也氏に深くお礼申し上げます．

米村明芳
杉山義明
2023 年 8 月

目次

第 I 部　問題編　1

第 II 部　解答・解説編　17

❶ – 折れ線関数の最大・最小　18

❷ – 不等式の変形：絶対値　23

❸ – 整数：整除，直角三角形の内接円の半径　27

❹ – 整数：不等式　31

❺ – 共通解　35

❻ – 有理数・無理数，**2** 直線のなす角　39

❼ – 整数係数の n 次方程式の有理数解：**3** 次方程式，有理数・無理数　43

❽ – 部屋割り論法　48

❾ – 場合の数：組分け問題　53

❿ – 確率の最大・最小：離散変数関数の増減　61

⓫ – 確率：排反事象に分ける，選んで並べる　67

⓬ – 確率：余事象，包含排除原理 73

⓭ – 確率：状態推移，漸化式 79

⓮ – 条件付き確率：カードを取る確率 88

⓯ – 期待値，数列の和の計算 94

⓰ – 三角比の応用：三角形の面積，余弦定理 105

⓱ – 三角方程式，対数方程式 110

⓲ – 三角方程式：**2** 次方程式の解の配置 115

⓳ – 三角関数：和積の公式，正弦定理，相加平均と相乗平均の関係 121

⓴ – 三角関数の定義：三角関数の次数下げ，傾きの関数 130

㉑ – $\cos\theta$ の n 倍角公式：チェビシェフ多項式 135

㉒ – 軌跡：円と直線，媒介変数消去 140

㉓ – 軌跡：極線 146

㉔ – 軌跡：媒介変数の存在条件，軌跡の追跡 149

㉕ – 領域と最大・最小：対称式 153

㉖ – 座標平面：座標設定，必要条件から十分性の確認 159

㉗ – 平面ベクトル：内積，角の二等分線 165

㉘ – 平面ベクトルの内積：内積式の表す図形 171

㉙ – ベクトルの応用 176

30 – 空間ベクトル：直線の交点の位置ベクトル，分点比 180

31 – 空間座標：平面と直線の垂直，定点と円周上の動点の距離 187

32 – 空間ベクトル：四面体，内積 193

33 – 群数列 197

34 – 漸化式の応用：**2** 円の位置関係，分数漸化式 200

35 – 連立漸化式：数列の剰余 210

36 – 数列：漸化式，帰納法 216

37 – 漸化式：n 乗の和，整数部分 222

38 – **3** 次関数の最大・最小：**2** 曲線が接する条件 227

39 – **3** 次関数のグラフの接線 234

40 – 放物線と円：**3** 次方程式の実数解，通過範囲 238

41 – 絶対値関数の定積分 242

42 – 放物線と円：**2** 次関数の最小値，領域の面積 247

43 – 不等式の証明：背理法 256

44 – 多変数関数の最大・最小：対称式で表された関数の最大・最小 263

45 – **3** 次方程式の解の範囲：媒介変数の存在条件 268

索引 274

1 関数 $f(x)=|x-a+2|-2|x-a-1|+1$ について，次の問いに答えよ．ただし，a は定数とする．

(1) $a=1$ のときの関数 $f(x)$ のグラフをかけ．

(2) 関数 $y=f(x)$ の $0 \leqq x \leqq 3$ の範囲での最小値 $m(a)$ を a を用いて表せ．

〔山口大〕

2 a，b，c を実数とする．関数 $f(x)=ax^2+bx+c$ が $0 \leqq x \leqq 1$ の範囲で，つねに $|f(x)| \leqq 1$ を満たすとき，次の問いに答えよ．

(1) $f'(0)$ を $f(0)$，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)$，$f(1)$ を用いて表せ．

(2) $|f'(0)| \leqq 8$ であることを証明せよ．

(3) $|f'(0)|=8$ となるときの $f(x)$ を求めよ．

〔横浜国立大〕

3 各辺の長さが整数となる直角三角形がある．

(1) この直角三角形の内接円の半径は整数であることを示せ．

(2) この直角三角形の三辺の長さの和は三辺の長さの積を割り切ることを証明せよ．

〔お茶の水女子大〕

4 以下の問いに答えよ．

(1) $f(x)=x^3-6x^2-96x-80$ とする．$x \geqq 14$ ならば $f(x)>0$ となることを示せ．

(2) 自然数 a に対して，$b=\dfrac{9a^2+98a+80}{a^3+3a^2+2a}$ とおく．b も自然数となるような a と b の組 $(a,\ b)$ をすべて求めよ．

〔金沢大〕

5 p を素数，q を整数とする．2 つの方程式

$$x^3-2x^2+x-p=0,\quad x^2-x+q=0$$

が 1 つの共通解を持つとき，p，q の値を求めよ．

〔産業医科大〕

6 座標平面上で，x 座標，y 座標がともに整数である点を格子点という．次の問いに答えよ．ただし，$\sqrt{3}$ が無理数であることを証明なしに用いてもよい．

(1) 直線 $y=\dfrac{1}{1+\sqrt{3}}x+1+\sqrt{3}$ が通る格子点をすべて求めよ．

(2) 原点を通る 2 直線 l，m について考える．l，m がそれぞれ原点以外にも格子点を通るとき，l，m のなす角は，60° にならないことを証明せよ．

〔山口大〕

7 $a=\sqrt[3]{\sqrt{\dfrac{65}{64}}+1}-\sqrt[3]{\sqrt{\dfrac{65}{64}}-1}$ とする．次の問に答えよ．

(1) a は整数を係数とする 3 次方程式の解であることを示せ．

(2) a は有理数でないことを証明せよ．

〔弘前大〕

8

(1) n を正の整数とする．x_1，x_2，$\cdots$，x_{n+1} を閉区間 $0\leqq x\leqq 1$ 上の異なる点とする．このとき，$0<x_k-x_j\leqq\dfrac{1}{n}$ をみたす j，k が存在することを示せ．

(2) ω を正の無理数とする．任意の正の整数 n に対して，$0<l\omega+m\leqq\dfrac{1}{n}$ をみたす整数 l，m が存在することを示せ．

〔千葉大〕

折れ線関数の最大・最小

❶ 関数 $f(x) = |x - a + 2| - 2|x - a - 1| + 1$ について，次の問いに答えよ．ただし，a は定数とする．

(1) $a = 1$ のときの関数 $f(x)$ のグラフをかけ．

(2) 関数 $y = f(x)$ の $0 \leqq x \leqq 3$ の範囲での最小値 $m(a)$ を a を用いて表せ．

〔山口大〕

アプローチ

(イ) 実数 x に対しその絶対値 $|x|$ とは，数直線上において原点 O と点 P(x) との距離のことです．これから

$$|x| = \begin{cases} x & (x \geqq 0) \\ -x & (x < 0) \end{cases}$$

がわかります．したがって，絶対値を扱う原則は「中身の符号による場合分け」です．上の x に $f(x)$ を代入すると

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) & (f(x) \geqq 0) \\ -f(x) & (f(x) < 0) \end{cases}$$

となるので，$y = |f(x)|$ のグラフは，$y = f(x)$ の $y < 0$ の部分を x 軸について折り返したものと $y \geqq 0$ の部分とをあわせたものになります．とくに，$f(x)$ が 1 次式のときは x 軸との交点のところで折れ曲る折れ線です．

(ロ) 本問のような関数のグラフは折れ線 (区分的には直線) で，グラフに跳びはありません (理系では「連続関数」という)．直線は通る 1 点と傾きできまりますから，(絶対値の中身) $= 0$ のところでの傾き (x の係数) の変化の様子をみればグラフは描けるはずです．ちょうど増減表のような，傾きの表を描いてみるとよいでしょう．

(ハ) $y = f(x)$ のグラフは(1)のグラフを平行移動したものになっていて，グラフの形は同じだから，$f(x)$ の増減の変わり目は $x = a + 1$ であることがわかります．(2)では，考えている範囲 $0 \leqq x \leqq 3$ に増減の変わり目がはいるかどうかで場合分けをします．また，$f(x)$ は極大値をもっていますが，極小値はもたないことがわかるので，$0 \leqq x \leqq 3$ での最小値は両端での値 $f(0)$,

$f(3)$ の小さい方 (正しくは「大きくない方」) です．ここで，

$$\min\{a,\ b\} = \begin{cases} b & (b \leqq a) \\ a & (a < b) \end{cases}$$

という記号を導入しておくと便利で，最小値は $\min\{f(0),\ f(3)\}$ とかけます．

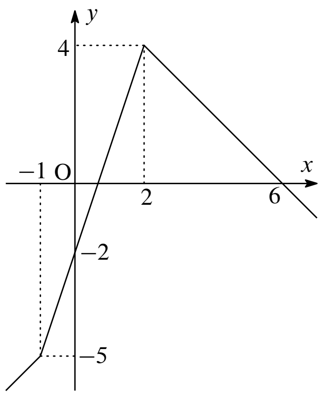
解答

(1)　$a = 1$ のとき

$$f(x) = |x + 1| - 2|x - 2| + 1$$

であり，絶対値の中身が 0 となる x の値は -1 と 2 だから，$f(x)$ は下の表のようになる．ゆえに，グラフは右図のようになる．

x		-1		2	
傾き	1		3		-1
$f(x)$	↗	-5	↗	4	↘



(2)　$f(x)$ の絶対値の中身が 0 となる x の値は $a - 2$ と $a + 1$ で，$(a + 1) - (a - 2) = 3$ であり，

$$f(a - 2) = -2|a - 2 - a - 1| + 1 = -5$$
$$f(a + 1) = |a + 1 - a + 2| + 1 = 4$$

だから，下の表のようになる．

x		$a-2$		$a+1$	
傾き	1		3		-1
$f(x)$	↗	-5	↗	4	↘

したがって，$f(x)$ は $x \leqq a + 1$ で増加，$a + 1 \leqq x$ で減少である．

(i)　$3 \leqq a + 1$ つまり $2 \leqq a$ のとき，$f(x)$ は $0 \leqq x \leqq 3$ で増加だから

$$\begin{aligned} m(a) &= f(0) = |-a + 2| - 2|-a - 1| + 1 \\ &= (a - 2) - 2(a + 1) + 1 = -a - 3 \end{aligned}$$

(ii)　$a + 1 \leqq 0$ つまり $a \leqq -1$ のとき，$f(x)$ は $0 \leqq x \leqq 3$ で減少だから

$$\begin{aligned} m(a) &= f(3) = |5 - a| - 2|2 - a| + 1 \\ &= (5 - a) - 2(2 - a) + 1 = a + 2 \end{aligned}$$

(iii)　$-1 \leqq a \leqq 2$ のとき，

$$m(a)=\min\{f(0),\ f(3)\}$$

であり，ここで

$$\begin{aligned}&f(0)=(2-a)-2(a+1)+1=-3a+1\\&f(3)=a+2\\&f(3)-f(0)=4a+1\end{aligned}$$

だから，

$$m(a)=\begin{cases}f(3)=a+2 & \left(-1\leqq a\leqq-\dfrac{1}{4}\right)\\ f(0)=-3a+1 & \left(-\dfrac{1}{4}\leqq a\leqq 2\right)\end{cases}$$

以上(i)，(ii)，(iii)から，

$$m(a)=\begin{cases}\boldsymbol{a+2} & \left(\boldsymbol{a\leqq-\dfrac{1}{4}}\right)\\ \boldsymbol{-3a+1} & \left(\boldsymbol{-\dfrac{1}{4}\leqq a\leqq 2}\right)\\ \boldsymbol{-a-3} & \boldsymbol{(2\leqq a)}\end{cases}$$

フォローアップ

1.　ここで用いた max，min は，実数の部分集合 S について

$$\min S=(S\text{ の要素で最小のもの})$$

を表す記号で，$\max S$ は右辺で最大としたものです．S が有限集合 $(\fallingdotseq\varnothing)$ のとき $\max S$，$\min S$ は必ずあります．とくに $S=\{f(0),\ f(3)\}$ としたものを解答で用いました．(2)(iii)のときは，$f(x)$ が $0\leqq x\leqq a+1$ で増加，$a+1\leqq x\leqq 3$ で減少と変化するのですが，最小値は両端のいずれかで起こることは変わりません．どちらになるかはすぐにはわからないので，この記号で表現するのです．

これらの記号は教科書にはありませんが，大学以上では普通に用いられる記号であり，入試問題にもときどき顔をだします．この記号をつかうと文字定数を含む関数の最大・最小，通過範囲などに関する問題が，かなりすっきり解けることがあります．(☞ 38，40 フォローアップ 1.)

絶対値をつかうと，特別な場合の max，min が表現できます：

$$\max\{a,\ b\}=\frac{1}{2}(a+b+|a-b|),\quad \min\{a,\ b\}=\frac{1}{2}(a+b-|a-b|)$$

また，次のこともしばしば有効です．

$$\max\{a,\ b\} \leqq c \iff a \leqq c \text{ かつ } b \leqq c$$
$$\max\{a,\ b\} \geqq c \iff a \geqq c \text{ または } b \geqq c$$
$$\min\{a,\ b\} \geqq c \iff a \geqq c \text{ かつ } b \geqq c$$
$$\min\{a,\ b\} \leqq c \iff a \leqq c \text{ または } b \leqq c$$

普通なら「最小値が 0 以上となる」条件を求めよといわれると，最小値 m を求めてそれが 0 以上となる条件を調べますが，$m = \min\{a,\ b\}$ とかけるなら「$a \geqq 0$ かつ $b \geqq 0$」となり，a，b の大小による場合分けなしで扱えるのです．

2. 本問の(2)から $m(a)$ のグラフが描け，これもまた折れ線です．これから

「$0 \leqq x \leqq 3$ でつねに $f(x) \geqq 0$ であるような a の値の範囲を求めよ」

に答えられます．実際，上の条件は $m(a) \geqq 0$ と同じで，(2)から $m(a)$ のグラフは右図のようになります． したがって，$m(a) \geqq 0$ となるのは

$$-2 \leqq a \leqq \frac{1}{3}$$

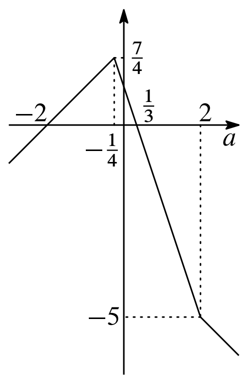
のときです．また

「$m(a)$ の最大値を求めよ」

についてもグラフから

$$m\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{7}{4}$$

とわかります．



3. 絶対値のついた 1 次関数の和については次のような問題があります．

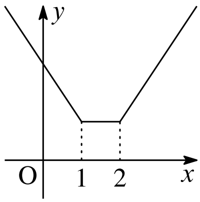
例 正の整数 n に対して，関数

$$f(x) = |x-1| + |x-2| + \cdots + |x-n|$$

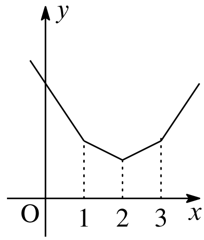
の最小値を求めよ．

n に 2 とか 3 あたりを代入して実験してみると，1 と n の真ん中あたりで最小になりそうだということがわかります．本問と同様に傾きの変化を調べます．

$n = 2$



$n = 3$



《解答》 $f(x)$ の x の係数は，$x \leqq 1$ のときは $-n\ (< 0)$，$n \leqq x$ のときは $n\ (> 0)$ である．$k \leqq x \leqq k+1\ (k = 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$ のとき，

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-1) + \cdots + (x-k) - (x-k-1) - \cdots - (x-n) \\ &= \{k - (n-k)\}x + (\text{定数}) \end{aligned}$$

だから，x の係数は $-n+2k$ であり，$k < \dfrac{n}{2}$ のとき負，$\dfrac{n}{2} < k$ のとき正である．

(i) ***n* が偶数のとき**，$f(x)$ は $x \leqq \dfrac{n}{2}$ のとき減少で，$\dfrac{n}{2} \leqq x \leqq \dfrac{n}{2}+1$ のとき定数，$\dfrac{n}{2}+1 \leqq x$ のとき増加だから，$f(x)$ の最小値は

$$\begin{aligned} & f\left(\frac{n}{2}\right) = f\left(\frac{n}{2}+1\right) \\ &= \left(\frac{n}{2}-1\right) + \cdots + \left(\frac{n}{2}-\frac{n}{2}\right) + \left(\frac{n}{2}+1-\frac{n}{2}\right) + \cdots + \left(n-\frac{n}{2}\right) \\ &= \left\{1 + \cdots + \left(\frac{n}{2}-1\right)\right\} + \left(1 + \cdots + \frac{n}{2}\right) \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}-1\right)\frac{n}{2} + \frac{n}{2} = \boldsymbol{\frac{n^2}{4}} \end{aligned}$$

(ii) ***n* が奇数のとき**，$f(x)$ は $x \leqq \dfrac{n+1}{2}$ で減少，$\dfrac{n+1}{2} \leqq x$ で増加だから，$f(x)$ の最小値は

$$\begin{aligned} f\left(\frac{n+1}{2}\right) &= \left(\frac{n+1}{2}-1\right) + \cdots + \left(\frac{n+1}{2}-\frac{n+1}{2}\right) \\ &\quad + \left(\frac{n+1}{2}+1-\frac{n+1}{2}\right) + \cdots + \left(n-\frac{n+1}{2}\right) \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{n-1}{2}\left(\frac{n-1}{2}+1\right) = \boldsymbol{\frac{1}{4}(n^2-1)} \end{aligned}$$

□

●出典大学

愛知医科大 ……15, 256
秋田大 ……4, 67
旭川医科大 ……15, 263
岩手大 ……45
愛媛大 ……10, 171
大阪医科大 ……13, 210
大阪市立大 ……8, 11, 130, 187
大阪教育大 ……47
お茶の水女子大 ……2, 27
金沢大 ……2, 31
関西大 ……64, 206
岐阜大 ……7, 121
九州大 ……6, 8, 45, 70, 94, 135, 191, 257
京都大 ……161
京都府立医科大 ……254
群馬大 ……14, 242
慶應大 ……5, 6, 71, 79, 88
工学院大 ……15, 268
神戸学院大 ……35
神戸大 ……4, 61
札幌医科大 ……9, 149
産業医科大 ……3, 35
島根大 ……7, 115
信州大 ……10, 159, 231
千葉大 ……3, 13, 48, 227
中央大 ……233
東京工科大 ……77
東京工業大 ……9, 153
東京大 ……4, 53, 209
東北大 ……5, 6, 12, 14, 72, 73, 105, 193, 234
徳島大 ……8, 14, 140, 247
名古屋市立大 ……67, 86
名古屋大 ……12, 200, 261
奈良女子大 ……9, 146
鳴門教育大 ……13, 222
一橋大 ……11, 162, 176
弘前大 ……3, 43
広島大 ……10, 165
福井工業大 ……144
福井大 ……13, 216
福島県立医科大 ……11, 180
法政大 ……65
北海道大 ……34
山口大 ……2, 3, 18, 39
横浜国立大 ……2, 7, 14, 23, 85, 110, 163, 238
早稲田大 ……12, 91, 197