はじめに

本書のねらい

本書は，駿台文庫の同じシリーズにあるハイレベル「数学 I・A・II・B・C［ベクトル］の完全攻略」(以下 IAIIBC と略記) の続きで，近年の数学Ⅲ・数学C (以下数ⅢCと略記．ただし数学 C は「平面上の曲線と複素数平面」のみ) の入試問題から 41 問を選び，それをネタに数ⅢCについて解説します．レベルは入試問題における標準からやや難といわれるものです．誰でも解けるような易問でもなく，誰もが解けないような難問珍問奇問ではありません．いわゆる出来不出来が合否を分ける問題を厳選しました．

数ⅢCの分野は習得すべき公式や定石，ルールなどがたくさんあります．体験すべき有名な問題や頻出の内容もあります．そこで本書のねらいは，教科書レベルを卒業した諸君に数ⅢC攻略の武器を与え，思考する道具を伝授することです．この本を卒業した暁には，どんどんほかの入試問題を解きたいと思ってもらえることでしょう．厳しい道のりですが，さあとりあえず 1 問解いてみましょう．

本書の構成

第 I 部は問題編です．まずここを見て自分なりの解答を作ってみましょう．このとき計算はきちんと最後まで実行してください．立式はあってるから計算は省略とか，計算は間違ったが方針はあっていたから大丈夫だという勉強をしていては駄目です．こういう勉強をしているとあっという間に計算力が落ちてしまい，入試の本番で計算ミスが命取りになって不合格というこ

とになりかねません．それに実は計算に大きな山場が隠れている問題もあります．なので入試の会場にいるつもりで解答を作ってみて下さい．

第 II 部は解答・解説編です．解答を作ろうとしてもまったく手が出ないときは，アプローチ を読んでみましょう．そしてもう一度考え直してみて下さい．これでもわからないときは 解答，フォローアップ を読みましょう．ここでもし答え (結果) が合っていたとしても必ず隅から隅まで読んで下さい．それは答えが出ても議論の仕方がよくないとか厳密ではないことなどがありえるからです．必ず自分の答案と比較してみましょう．

アプローチ，フォローアップ にある例題は見るだけではなく，これも鉛筆を動かして答えを導いてください．本書の最大の特徴は一問を一問で終わらせない解説です．本問に入る前のウォーミングアップになるような例題であったり，本問の内容を横に広げるような類題であったり，本問の奥行きを深めるような一般化であったり，一緒に学習すると本問の理解が深まり記憶に残りやすくするための参考問題であったり．ひとつの問題を解くことによって，その周辺の問題の何問分にもなるように解説をつけました．ですから一問の学習がほかの問題集より大変かもしれません．この問題集を仕上げるのに問題数以上に時間がかかるかもしれません．牛歩ではありますが，これが完全攻略への王道なのです．

本書の利用法

●数 III C の履修後の自宅学習として …… 1 週間に 5 問ずつで約 2 か月で完成できます．莫大な量ではないのでヤル気を削ぐことなく，無理のない量で学習を継続維持させることができます．

●長期休みの課題として数 III C を復習 …… 分量的には，この本に没頭すれば一週間で仕上げることができるでしょう．たった一週間でパワーアップした自分に驚くことになるでしょう．

●大学入学共通テスト後に 2 次学力 (記述式) の感覚を取り戻す …… リサーチを待っている間や志望校決定に時間を費やしている間にこの一冊を終わらせます．ちょうどこの本を卒業する頃には，過去問演習に入る時期になるでしょう．二次学力が戻ってくれば難なく過去問対策もできます．

最後に一言

本書はひとつの問題に対する解答解説に 3 ページ以上を割いています．一問を一問で終わらせない内容を盛り込んだつもりです．何度もかみしめながら学習するのに耐えうる詳しさと内容の深さだと考えています．皆さんの大学合格への強力なバックアップができることを願っています．

末筆ではありますが，本書の企画に賛同していただいた元駿台文庫の中塚圭介氏並びに現駿台文庫の加藤達也氏をはじめとする編集部の方々，校正や内容チェックで支援をいただいた駿台予備学校講師の井辺卓也氏に深くお礼申し上げます．

米村明芳
杉山義明
2023 年 8 月

目次

12 関数 $g(t)$ を $g(t)=\begin{cases} t & (t \geqq 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases}$ と定義する．

実数 x に対し，$f(x)=\displaystyle\int_{-2}^{2} g(1-t^2)g(t-x)\,dt$ とおく．

(1) $f(x)$ を求めよ．

(2) $f(x)$ はすべての x で微分可能であることを示せ．

〔埼玉大〕

13 a を正の数，n を自然数とする．2 つの曲線 $y=e^{-ax}\sin x$，$y=e^{-ax}\cos x$ で囲まれた図形のうち，y 軸と直線 $x=2n\pi$ の間にある部分の面積を S_n とおく．次の各問いに答えよ．

(1) $S_{n+1}-S_n=e^{-2na\pi}S_1$ が成り立つことを示せ．

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = 2S_1$ となるように a を定めよ．

〔東京学芸大〕

14 $a>0$，$t>0$ に対して定積分

$$S(a,\ t)=\int_0^a \left| e^{-x}-\frac{1}{t} \right| dx$$

を考える．

(1) a を固定したとき，t の関数 $S(a,\ t)$ の最小値 $m(a)$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\lim_{a\to 0} \frac{m(a)}{a^2}$ を求めよ．

〔東京工業大〕

17 2 曲線 $C_1 : y = \cos x$，$C_2 : y = \cos 2x + a \ (a > 0)$ が互いに接している．すなわち，C_1，C_2 には共有点があり，その点において共通の接線をもっている．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 正数 a の値を求めよ．

(2) $0 < x < 3\pi$ の範囲で 2 曲線 C_1，C_2 のみで囲まれる図形を x 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積を求めよ．

〔静岡大〕

18 2 つの放物線 $y = x^2 - 1$，$y = x^2 - 8x + 23$ について，次の各問に答えよ．

(1) これらの 2 つの放物線には共通する接線がある．この共通する接線の方程式を求めよ．

(2) これら 2 つの放物線および共通する接線により囲まれる部分を y 軸のまわりに回転してできる回転体の体積を求めよ．

〔宇都宮大〕

19 座標空間内に 2 点 A(1, 0, 0) と B(−1, 0, 0) がある．不等式 $\angle\mathrm{APB} \geqq 135^\circ$ をみたす空間内の点 P の全体の集合に，2 点 A，B をつけ加えてできる立体の体積を求めよ．

〔千葉大〕

20 xyz 空間内に 2 点 $\mathrm{P}(u,\ u,\ 0)$，$\mathrm{Q}(u,\ 0,\ \sqrt{1-u^2})$ を考える．u が 0 から 1 まで動くとき，線分 PQ が通過してできる曲面を S とする．

(1) 点 $(u,\ 0,\ 0)\ (0 \leqq u \leqq 1)$ と線分 PQ の距離を求めよ．

(2) 曲面 S を x 軸のまわりに 1 回転させて得られる立体の体積を求めよ．

〔東北大〕

つぎはぎ関数の定積分と微分可能性

12 関数 $g(t)$ を $g(t)=\begin{cases} t & (t \geqq 0) \\ 0 & (t<0) \end{cases}$ と定義する．

実数 x に対し，$f(x)=\displaystyle\int_{-2}^{2} g(1-t^2)g(t-x)\,dt$ とおく．

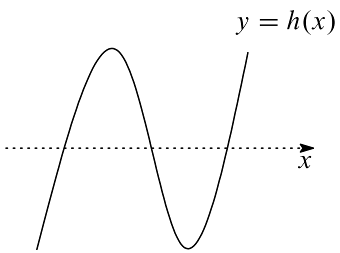
(1) $f(x)$ を求めよ．

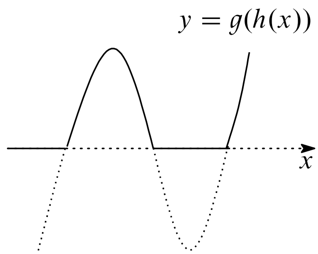
(2) $f(x)$ はすべての x で微分可能であることを示せ．

〔埼玉大〕

アプローチ

(イ) 本問の関数は，$g(◯)$ の中身 ◯ が負なら 0 で，そうでなければ中身の ◯ のままという関数です．例えば $h(x)$ が左下図のような関数であれば，$g(h(x))$ は右下図のような関数になります．





(ロ) $f(x)$ は，各 x に対して右辺の積分を計算した結果の値を対応させる関数で，t で積分するときは x は定数です．また，0 の定積分は 0 なので，$g(1-t^2)g(t-x)$ が 0 でない区間だけを計算することになります．つまり積分するのは $1-t^2$，$t-x$ がともに 0 以上の区間だけになり，この区間がそのまま積分区間になります．もともと積分区間は $-2 \leqq t \leqq 2$ ですが，$1-t^2$ が 0 以上になる区間は $-1 \leqq t \leqq 1$ だから，この区間で $t-x$ の符号を考えることになります．ちなみに $t-x$ は t の関数であることを忘れないように．また結局，積分をするのは中身そのままの関数 $(1-t^2)(t-x)$ です．

(ハ) 積分区間が原点対称のときは

$$\int_{-a}^{a} x^{\text{奇数}}dx=0,\quad \int_{-a}^{a} x^{\text{偶数}}dx=2\int_{0}^{a} x^{\text{偶数}}dx$$

(ただし，指数は 0 以上の整数) を利用しましょう．もっと一般化すると

$$\int_{-a}^{a}(\text{奇関数})\,dx = 0,\quad \int_{-a}^{a}(\text{偶関数})\,dx = 2\int_{0}^{a}(\text{偶関数})\,dx$$

(ニ)　関数 $f(x)$ について，

$$f(x) \text{ が } x = a \text{ で}\textbf{微分可能} \overset{\text{定義}}{\iff} \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \text{ が存在}$$

ですが，これはかみくだいていえば $y = f(x)$ のグラフの $x = a$ に対応する点で接線が引けるということです．またグラフがなめらかにつながっているともいえます．だから絶対値のついた $y = |x|$ のような関数は，グラフがポキっと折れているのでその点では微分可能ではありません．

(ホ)　つぎはぎ関数のつなぎ目での微分可能性は，まずそのつなぎ目でグラフがつながっているか，つまり連続であるかを確認します．次にそのつなぎ目の左右のグラフについて接線の傾きを求めます．それらが一致すれば微分可能ということになります (☞ フォローアップ 2.).

解答

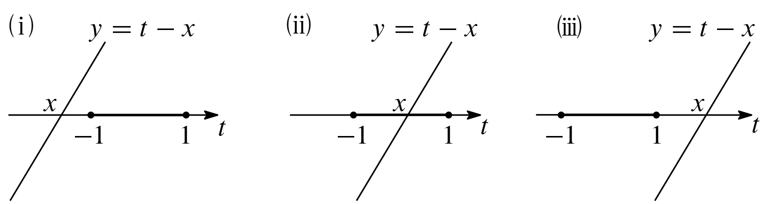
(1)

$$g(1-t^2) = \begin{cases} 1-t^2 & (1-t^2 \geqq 0 \text{ のとき}) \\ 0 & (1-t^2 < 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$
$$= \begin{cases} 1-t^2 & (-1 \leqq t \leqq 1 \text{ のとき}) \\ 0 & (t < -1,\ 1 < t \text{ のとき}) \end{cases}$$

だから

$$f(x) = \int_{-2}^{2} g(1-t^2)g(t-x)\,dt = \int_{-1}^{1}(1-t^2)g(t-x)\,dt$$

t の区間 $[-1,\ 1]$ と x との位置関係は下の 3 通り．



(i)　$x \leqq -1$ のとき

$$f(x) = \int_{-1}^{1}(1-t^2)(t-x)\,dt = \int_{-1}^{1}(t-t^3-x+xt^2)\,dt$$

$$= 2\int_0^1 (xt^2 - x)dt = 2\left[\frac{1}{3}xt^3 - xt\right]_0^1$$
$$= \frac{2}{3}x - 2x = -\frac{4}{3}x$$

(ii)　$-1 \leqq x \leqq 1$ のとき

$$f(x) = \int_x^1 (1-t^2)(t-x)\,dt = \int_x^1 (t - t^3 - x + xt^2)\,dt$$
$$= \left[\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{4}t^4 - xt + \frac{1}{3}xt^3\right]_x^1$$
$$= -\frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{4}$$

(iii)　$x \geqq 1$ のとき，$g(t-x) = 0\ (-1 \leqq t \leqq 1)$ だから $f(x) = 0$

(i)〜(iii)より

$$\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} -\dfrac{4}{3}x & (x \leqq -1) \\ -\dfrac{x^4}{12} + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{2x}{3} + \dfrac{1}{4} & (-1 \leqq x \leqq 1) \\ 0 & (x > 1) \end{cases}}$$

(2)　上の場合分けの端点 $x = \pm 1$ でそれぞれの関数値は一致するので，$f(x)$ は任意の実数 x において連続であり，$x \fallingdotseq \pm 1$ では微分可能だから，$x = \pm 1$ での微分可能性を示せばよい．そこで

$$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{4}{3} & (x < -1) & \cdots\cdots\cdots① \\ -\dfrac{x^3}{3} + x - \dfrac{2}{3} & (-1 < x < 1) & \cdots\cdots\cdots② \\ 0 & (x > 1) & \cdots\cdots\cdots③ \end{cases}$$

であり，$h(x) = -\dfrac{x^3}{3} + x - \dfrac{2}{3}$ とおくと

$$h(-1) = \frac{1}{3} - 1 - \frac{2}{3} = -\frac{4}{3} = ①$$
$$h(1) = -\frac{1}{3} + 1 - \frac{2}{3} = 0 = ③$$

となるので $x = \pm 1$ で微分可能であり，題意が示された．　□

フォローアップ

1.　①〜③の場合分けの範囲から $=$ が抜けていますが，それは端点では $f(x)$ が微分可能とは限らないからです．導関数はこの点で定義できるかどうかはこの段階ではわかりません．そういう理由から $=$ を除いてあります．

2.　解答 (2)で用いたことは直観的にあきらかでしょうが，きちんと示すと次のようになります．

$f(x)$ が a を内部に含む区間で微分可能な関数 $g(x)$，$h(x)$ によって

$$f(x)=\begin{cases} g(x) & (x \leqq a) \\ h(x) & (x>a) \end{cases}$$

と表されたとき，$f(x)$ が $x=a$ で微分可能であるための必要十分条件は

$$g(a)=h(a),\ g'(a)=h'(a)$$

です．実際，微分可能なら連続ですから，$\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$ が成り立つことが必要ですが，

$$\lim_{x\to a-0} f(x)=\lim_{x\to a-0} g(x)=g(a)$$
$$\lim_{x\to a+0} f(x)=\lim_{x\to a+0} h(x)=h(a)$$

だから，$f(a)=g(a)=h(a)$ です．また，$Q=\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ を考えると，

$$\lim_{x\to a-0} Q=\lim_{x\to a-0}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}=g'(a)$$
$$\lim_{x\to a+0} Q=\lim_{x\to a+0}\frac{h(x)-h(a)}{x-a}=h'(a)$$

だから，$g'(a)=h'(a)\ (=f'(a))$ □

定義にもとづいた証明問題などであれば，上のような議論が求められることもあります．つなぎ目での連続／微分可能の定義を「左右の極限に分けて扱う」ことを頭にいれておいてください．

3.　次のような関数とか抽象関数であれば，やはり定義に戻って微分可能であるかどうかを議論しないとダメです．

例 I　次の $f(x)$ は $x=0$ のとき微分可能であるかどうかを調べよ．

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x} & (x \fallingdotseq 0 \text{ のとき}) \\ 0 & (x=0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

《解答》　$x \fallingdotseq 0$ のとき

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{x^2\sin\dfrac{1}{x}-0}{x}=x\sin\frac{1}{x} \qquad \cdots\cdots\cdots ⓐ$$

ここで

$$0 \leqq \left| x \sin \frac{1}{x} \right| \leqq |x| \qquad \cdots\cdots\cdots(\star)$$

が成立し，$x \to 0$ とすると $|x| \to 0$ となるので，はさみうちの原理より

$$\lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$$

したがって $\lim\limits_{x \to 0}$ ⓐ が存在し，$f(x)$ は $x = 0$ で微分可能である． □

《注》 上の解答の $(\star)$ の式のかわりに

$$-1 \leqq \sin \frac{1}{x} \leqq 1 \text{ より } -x \leqq x \sin \frac{1}{x} \leqq x$$

とするのは少しまずいです．なぜなら，$x \to +0$ のときは $x > 0$ だから正しいですが，$x \to -0$ のときは $x < 0$ だから 2 番目の不等式の不等号の向きを逆転させないとダメです．こういう場合分けをするのは面倒なだけなので絶対値をつけた解答にしました．符号が変化するときにはよく使います．

例 II 関数 $f(x)$ は実数全体で定義された連続関数で，すべての x，y について $f(x+y) = f(x) + f(y)$ をみたすとする．$f(x)$ が $x = 0$ で微分可能であれば実数全体で微分可能であることを証明せよ．

《解答》 条件式より

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x) + f(h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{h} \qquad \cdots\cdots\cdots ⓑ$$

の極限が存在することがいえればよい．そこで条件式に $x = y = 0$ を代入すると $f(0) = f(0) + f(0)$ となり $f(0) = 0$．これと $x = 0$ で微分可能であることより次の極限は存在する．

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{h}$$

これはⓑと同じだから題意は証明された． □

《注》 導関数の定義からⓑの値が存在すれば $f'(x)$ だから，$f'(x) = f'(0)$ であることがわかり，$f(0) = 0$ とあわせて $f(x) = f'(0)x$ となります．このように条件式 $f(x+y) = \cdots$ と $x = 0$ で微分可能であることから導関数の定義を用いて $f'(x)$ を求め，$f(0)$ の値から関数 $f(x)$ を求める流れは頻出です．誘導が無くても自力で導けるようにしましょう．

●出典大学