（注）この科目には，選択問題があります。(3 ページ参照。)

第１問 （必答問題）（配点　15）

以下の問題を解答するにあたっては，必要に応じて 9 ページの三角関数の表を用いてもよい。

太郎さんと花子さんの学校では，今度，講堂で映画が上映されることになった。二人は映画が一番よく見える席について話している。

図 1 のような横から見た図を考え，スクリーンの下端を A，上端を B，目の位置を P とする。点 P から直線 AB に垂直な直線を引き，直線 AB との交点を O とする。$\mathrm{OA} = 2\ (\mathrm{m})$，$\mathrm{AB} = 2.5\ (\mathrm{m})$ であり，$\mathrm{OP} = a\ (\mathrm{m})$，$\angle \mathrm{APB} = \theta$ とする。ただし，$a > 0$ であり，θ は鋭角である。このとき θ が最大となる a の値を求めよう。

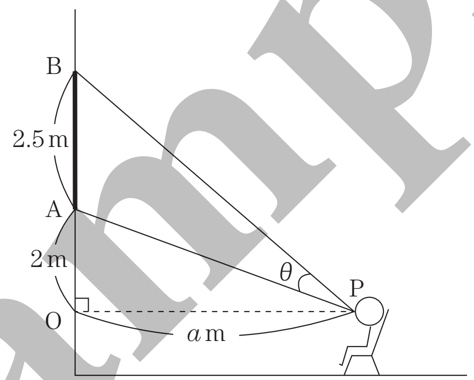


図 1

（数学 II，数学 B，数学 C 第 1 問は次ページに続く。）

太郎：$\angle\mathrm{OPA}=\alpha$，$\angle\mathrm{OPB}=\beta$ とおくと，$\tan\alpha$ と $\tan\beta$ が a の式で表せるよね。$\theta=\beta-\alpha$ だから，タンジェントの加法定理を用いるといいんじゃないかな。

花子：3 点 A，B，P を通る円を考えると，θ は弦 AB に対する円周角だよね。この円の半径を R とすると，正弦定理から $\sin\theta=\dfrac{\mathrm{AB}}{2R}$ だから，θ が最大となる，つまり $\sin\theta$ が最大となるのは，R が最小となるときだね。

(1)　太郎さんの求め方について考えてみよう。

$\angle\mathrm{OPA}=\alpha$，$\angle\mathrm{OPB}=\beta$ とおくと，$\tan\alpha=\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{a}$，$\tan\beta=\dfrac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}\,a}$

であり，$\theta=\beta-\alpha$ であるから

$$\frac{1}{\tan\theta}=\frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}a+\frac{\boxed{\text{カキ}}}{\boxed{\text{ク}}\,a}$$

である。よって，相加平均と相乗平均の関係により，θ が最大となる a の値を求めることができる。

（数学 II，数学 B，数学 C 第 1 問は次ページに続く。）

(2)　花子さんの求め方について考えてみよう。

図2のように直線 OP を x 軸とし，直線 OA を y 軸とする座標平面を考える。2点 A，B を通り，x 軸の正の部分と共有点をもつ円のうち，半径が最小であるものを C とする。この円 C は x 軸と接するから，円 C の半径は $\dfrac{\boxed{\text{ケコ}}}{\boxed{\text{サ}}}$

であり，円 C の方程式は

$$(x-a)^2+\left(y-\frac{\boxed{\text{ケコ}}}{\boxed{\text{サ}}}\right)^2=\left(\frac{\boxed{\text{ケコ}}}{\boxed{\text{サ}}}\right)^2$$

とおける。さらに，この円 C が2点 A，B を通ることから，θ が最大となる a の値を求めることができる。

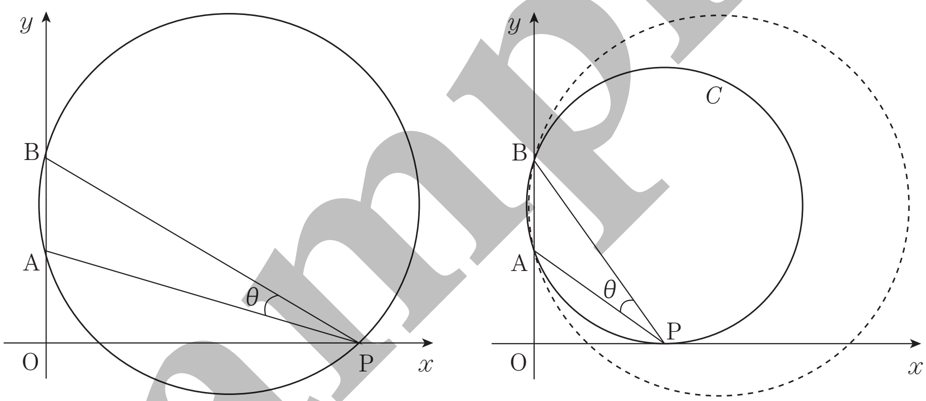


図2

(数学 II，数学 B，数学 C 第1問は次ページに続く。)

(3)　太郎さんまたは花子さんの求め方を用いることにより，θ が最大となる a の値は

$$a = \boxed{\text{シ}}$$

であることがわかる。このとき θ の大きさは $\boxed{\text{ス}}$ 。

$\boxed{\text{ス}}$ の解答群

⓪　ちょうど 21° である
①　21° より大きく 22° より小さい
②　ちょうど 22° である
③　22° より大きく 23° より小さい
④　ちょうど 23° である
⑤　ちょうど 67° である
⑥　67° より大きく 68° より小さい
⑦　ちょうど 68° である
⑧　68° より大きく 69° より小さい
⑨　ちょうど 69° である

（数学 II，数学 B，数学 C 第 1 問は 9 ページに続く。）

第２問 （必答問題）（配点　15）

〔1〕 太郎さんと花子さんは，指数関数のグラフと対数関数のグラフについて話している。

> 太郎：$a>0$，$a \fallingdotseq 1$ として，指数関数 $y=a^x$ のグラフと対数関数 $y=\log_a x$ のグラフは，直線 $y=x$ に関して対称なんだよね。
>
> 花子：そうだね。x と y を入れかえた式になっている二つのグラフは，直線 $y=x$ に関して対称になるからね。

(1)　関数 $y=\dfrac{1}{2}\log_2 x-\dfrac{1}{2}$ のグラフと直線 $y=x$ に関して対称なグラフを表す関数は $\boxed{\text{ア}}$ である。

$\boxed{\text{ア}}$ の解答群

⓪ $y=4^{x-1}$	① $y=\dfrac{1}{2}\cdot 4^x$
② $y=2\cdot 4^x$	③ $y=4^{x+1}$

（数学 II，数学 B，数学 C 第 2 問は次ページに続く。）

（2）　$f(x)=\log_4 x+1$ とする。このとき

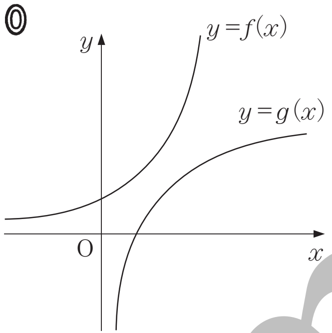
$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$$

である。

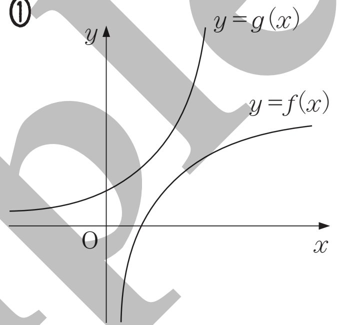
$y=f(x)$ のグラフと $y=g(x)$ のグラフが直線 $y=x$ に関して対称であるとすると，$y=f(x)$ のグラフと $y=g(x)$ のグラフを図示したものは $\boxed{\text{エ}}$ となる。

$\boxed{\text{エ}}$ については，最も適当なものを，次の ⓪ ～ ⑤ のうちから一つ選べ。

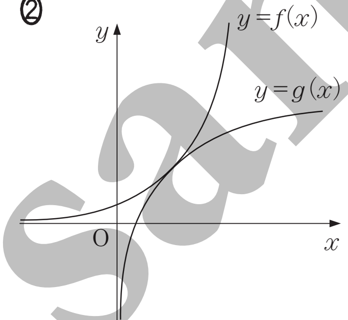
⓪



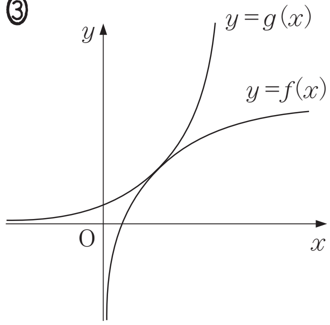
①



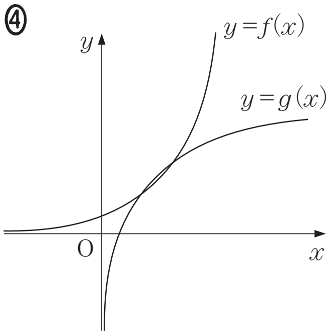
②



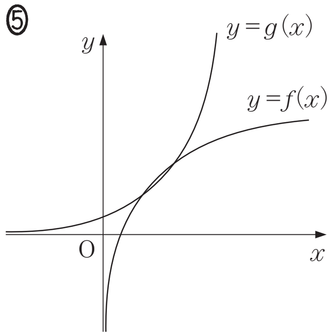
③



④



⑤



（数学 II，数学 B，数学 C 第 2 問は次ページに続く。）

〔2〕 以下の問題を解答するにあたっては，必要に応じて 14，15 ページの常用対数表を用いてもよい。

音は空気の圧力変化であり，音によって生じる大気圧からの圧力の変化分を音圧という。人間が聞き取ることのできる音の大きさの範囲(可聴範囲)は，音圧でおよそ 0.00002 Pa から 20 Pa までである。ただし，Pa (パスカル)は圧力の単位である。

音の大きさの表示方法として，デシベル表示と呼ばれるものがある。これは，音圧レベル(単位は dB，デシベル)を

$$L = 10\log_{10}\frac{p^2}{{p_0}^2} = \boxed{\text{オカ}}\ \log_{10}\frac{p}{p_0}$$

で定義し，L の大小で音の強弱を表す方法である。ただし，p は測定された音圧(単位は Pa)とし，p_0 は音圧の基準値($0.00002 = 2 \times 10^{-5}$ Pa)である。

(数学 **II**，数学 **B**，数学 **C** 第 **2** 問は次ページに続く。)

よって，人間が聞き取ることのできる音の大きさの範囲(可聴範囲)を，デシベルに換算すると $\boxed{\text{キ}}$ dB から $\boxed{\text{クケコ}}$ dB であることがわかる。

また，セミの鳴き声の音圧レベルが 80 dB であるとすると，その音圧は，およそ $\boxed{\text{サ}}.\boxed{\text{シ}}$ Pa である。

音圧レベルが同じものの音源の数が n 倍になったときの音圧レベルは $10\log_{10} n$ だけ増加する。ただし，n は自然数とする。

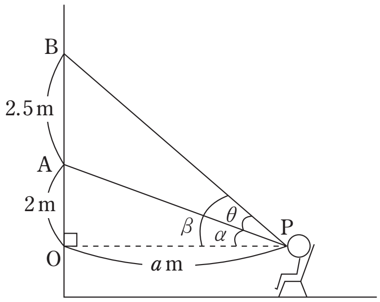
セミ一匹の鳴き声の音圧レベルが 80 dB で，どのセミの鳴き声も同じ音圧レベルとするとき，音圧レベルが 96 dB 以上になるのは，セミが少なくとも $\boxed{\text{スセ}}$ 匹以上鳴いているときと考えられる。

(数学 II，数学 B，数学 C 第 2 問は次ページに続く。)

解　説

第１問　（数学Ⅱ　三角関数，図形と方程式，いろいろな式）
【難易度…★★】

(1)



$$\tan\alpha=\frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OP}}=\boldsymbol{\frac{2}{a}}$$

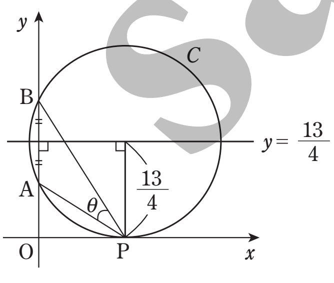
$$\tan\beta=\frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{OP}}=\frac{4.5}{a}=\boldsymbol{\frac{9}{2a}}$$

であり，$\theta=\beta-\alpha$ であるから

$$\begin{aligned}\frac{1}{\tan\theta}&=\frac{1}{\tan(\beta-\alpha)}\\&=\frac{1+\tan\beta\tan\alpha}{\tan\beta-\tan\alpha}\\&=\frac{1+\frac{9}{2a}\cdot\frac{2}{a}}{\frac{9}{2a}-\frac{2}{a}}\\&=\frac{2a^2+18}{5a}\\&=\boldsymbol{\frac{2}{5}}a+\boldsymbol{\frac{18}{5a}}\qquad\cdots\cdots①\end{aligned}$$

である。

(2)



$\mathrm{A}(0,\ 2)$，$\mathrm{B}\left(0,\ \frac{9}{2}\right)$ であり，円 C は２点 A，B を通るから，C の中心は線分 AB の垂直二等分線

$$y=\frac{2+\frac{9}{2}}{2}\qquad\therefore\quad y=\frac{13}{4}$$

上にある。C は x 軸と接するから，C の半径は，C の中心と x 軸との距離に等しい。よって，C の半径は

$$\boldsymbol{\frac{13}{4}}$$

である。

(3)（太郎さんの求め方）

$\frac{2}{5}a>0$，$\frac{18}{5a}>0$ であるから，相加平均と相乗平均の関係より

$$\frac{2}{5}a+\frac{18}{5a}\geqq2\sqrt{\frac{2}{5}a\cdot\frac{18}{5a}}\qquad\cdots\cdots②$$
$$=\frac{12}{5}$$

が成り立つ。②の等号が成り立つのは

$$\frac{2}{5}a=\frac{18}{5a}\qquad\therefore\quad a^2=9$$

のときであり，$a>0$ より

$$a=3\qquad\cdots\cdots③$$

のときである。θ は鋭角であるから，θ が最大となるのは $\tan\theta$ が最大となるとき，すなわち，$\frac{1}{\tan\theta}$ が最小となるときである。①，②，③より，θ が最大となる a の値は

$$\boldsymbol{a=3}$$

である。このとき，①，②より

$$\frac{1}{\tan\theta}=\frac{12}{5}\qquad\therefore\quad\tan\theta=\frac{5}{12}=0.4166\cdots$$

であるから，三角関数の表より，θ の大きさは 22° より大きく 23° より小さい。（**3**）

（花子さんの求め方）

２点 A，B を通り，x 軸の正の部分と共有点をもつ円の半径を R とすると，正弦定理より

$$\sin\theta=\frac{\mathrm{AB}}{2R}\qquad\cdots\cdots④$$

である。θ は鋭角であるから，θ が最大となるのは $\sin\theta$ が最大となるときである。④より，これは R が最小となるとき，すなわち，この円が x 軸と接するときである。このとき，x 軸との接点は $\mathrm{P}(a,\ 0)$ であるから，C の方程式は

$$(x-a)^2+\left(y-\frac{13}{4}\right)^2=\left(\frac{13}{4}\right)^2$$

とおける。C は $\mathrm{A}(0,\ 2)$ を通るから

$$(0-a)^2+\left(2-\frac{13}{4}\right)^2=\left(\frac{13}{4}\right)^2$$

$$\therefore\quad a^2=9$$

であり，$a>0$ より，θ が最大となる a の値は

$$\boldsymbol{a=3}$$

である。このとき，④より

$$\sin\theta=\frac{\frac{5}{2}}{2\cdot\frac{13}{4}}=0.3846\cdots$$

であるから，三角関数の表より，θ の大きさは 22° より大きく 23° より小さい。(❸)

第２問　(数学Ⅱ　指数関数・対数関数)

【難易度…〔１〕★，〔２〕★】

〔１〕

(1)　$y=\frac{1}{2}\log_2 x-\frac{1}{2}$　……①

①において，x と y を入れかえると

$$x=\frac{1}{2}\log_2 y-\frac{1}{2}$$

となるので

$$\log_2 y=2x+1$$

$$y=2^{2x+1}=2\cdot 2^{2x}=2\cdot 4^x$$

よって，①のグラフと直線 $y=x$ に関して対称なグラフを表す関数は

$$y=2\cdot 4^x\quad (❷)$$

(2)　$f(x)=\log_4 x+1$

$y=f(x)$ のグラフは y 軸を漸近線としてもつ右上がりの曲線である。

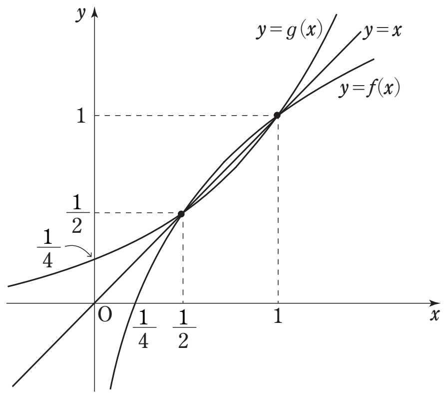
$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\log_4\frac{1}{2}+1=-\frac{1}{2}+1=\mathbf{\frac{1}{2}}$$

であり

$$f(1)=\log_4 1+1=1$$

であるから，$y=f(x)$ のグラフは２点 $\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$，$(1,\ 1)$ を通る。

よって，$y=f(x)$ のグラフは直線 $y=x$ と２点 $\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$，$(1,\ 1)$ で交わるので，$y=f(x)$，$y=g(x)$ のグラフの概形は　❺



(注)　$y=\log_4 x+1$ において，x と y を入れかえると

$$x=\log_4 y+1$$

となるので

$$\log_4 y=x-1$$

$$y=4^{x-1}$$

よって

$$g(x)=4^{x-1}$$

〔２〕　$L=10\log_{10}\frac{p^2}{{p_0}^2}=10\log_{10}\left(\frac{p}{p_0}\right)^2=\mathbf{20}\log_{10}\frac{p}{p_0}$　……①

人間が聞き取ることができる音の大きさの範囲(可聴範囲)は，0.00002(＝2×10^{-5}) Pa から 20 Pa までであり

$p=2\times10^{-5}$ のとき，$\frac{p}{p_0}=1$ より

$$L=20\log_{10}1=0$$

$p=20$ のとき，$\frac{p}{p_0}=\frac{20}{2\times10^{-5}}=10^6$ より

$$L=20\log_{10}10^6=120$$

よって，人間の可聴範囲をデシベルに換算すると

0 dB から **120** dB

である。

セミの鳴き声が 80 dB であるとき，①より

$$80=20\log_{10}\frac{p}{p_0}$$

$$4=\log_{10}\frac{p}{p_0}$$

$$\frac{p}{p_0}=10^4$$

$p_0=2\times10^{-5}$ であるから，音圧は

$$p=10^4p_0=10^4\times2\times10^{-5}=\mathbf{0.2}\ \text{(Pa)}$$

次に，セミが n 匹鳴いているとき，音圧レベルは $10\log_{10}n$ 増加するので，音圧レベルが 96 dB 以上にな

るとき

$$10\log_{10}n \geqq 96-80$$

$$\log_{10}n \geqq 1.6 \qquad \cdots\cdots ②$$

常用対数表より

$$\log_{10}3.98=0.5999$$

$$\log_{10}3.99=0.6010$$

であるから

$$\begin{aligned}\log_{10}39.9&=\log_{10}(3.99\times 10)\\&=\log_{10}3.99+\log_{10}10\\&=0.6010+1\\&=1.6010\end{aligned}$$

同様に，$\log_{10}39.8=1.5999$ であり，②を満たす最小の自然数 n は $n=40$ であるから，セミが少なくとも **40** 匹以上鳴いていると考えられる。

第３問 （数学Ⅱ　微分・積分の考え）

【難易度…〔１〕★，〔２〕★】

〔１〕　$x^3-3ax^2-b=0 \qquad \cdots\cdots(*)$

(1)　$f(x)=x^3-3ax^2$ とおくと

$$\begin{aligned}f'(x)&=3x^2-6ax\\&=\mathbf{3}x(x-\mathbf{2}a)\end{aligned}$$

である。$f'(x)=0$ とすると

$$x=0,\ 2a$$

であるから，$f(x)$ が極値をもつのは

$$2a \neq 0$$

$$\therefore\quad a \neq \mathbf{0}$$

のときであり，このとき，$y=f(x)$ は $x=0,\ 2a$ で極値をとる。また

$$f(x)=x^2(x-3a)$$

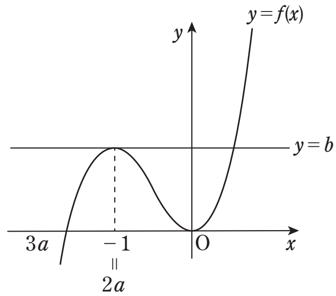
であり，方程式 $f(x)=0$ は $x=0$ を２重解にもつから，$y=f(x)$ のグラフは

点 $(\mathbf{0},\ 0)$

で x 軸と接し，点 $(3a,\ 0)$ で x 軸と交わる。(*)は

$$f(x)=b$$

と変形でき，(*)の実数解は $y=f(x)$ のグラフと直線 $y=b$ の共有点の x 座標に等しい。よって，(*)が -1 を２重解にもつとき，$y=f(x)$ のグラフは直線 $y=b$ と点 $(-1,\ f(-1))$ で接する。



このとき

$$2a=-1 \quad かつ \quad f(-1)=-1-3a=b$$

であるから

$$a=-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}},\ b=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$$

である。

(2)　$P(x)=x^3-3ax^2-b$ とおくと，(*)が -1 を解にもつとき，$P(-1)=0$ が成り立つ。よって

$$-1-3a-b=0$$

$$\therefore\quad b=\mathbf{-3}a\mathbf{-1} \qquad \cdots\cdots ①$$

である。このとき

$$\begin{aligned}P(x)&=x^3-3ax^2+3a+1\\&=(x+1)\{x^2-(3a+1)x+3a+1\}\cdots\cdots ②\end{aligned}$$

であり，$P(x)$ を $x+1$ で割ったときの商 $Q(x)$ は

$$Q(x)=x^2-(\mathbf{3}a\mathbf{+1})x+\mathbf{3}a\mathbf{+1}$$

である。

さらに，(*)が -1 を２重解にもつとき，$Q(-1)=0$ が成り立つ。よって

$$1+(3a+1)+3a+1=0$$

$$\therefore\quad a=-\frac{1}{2}$$

であり，これと①より

$$b=\frac{1}{2}$$

である。このとき，②より

$$\begin{aligned}P(x)&=(x+1)\left(x^2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\right)\\&=(x+1)^2\left(x-\frac{1}{2}\right)\end{aligned}$$

であるから，(*)の２重解 -1 でない残りの解は

$$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$$

である。