数学 I，数学 A

（全　問　必　答）

第1問 （配点　30）

〔1〕

(1)　a，b を正の実数とする。

　$1 < x < 1 + a$ を満たす整数 x がちょうど二つ存在するような a の値の範囲は

$$\boxed{\text{ア}} < a \leqq \boxed{\text{イ}}$$

である。また，$\dfrac{1}{3} < x < \dfrac{1}{3} + b$ を満たす整数 x がちょうど二つ存在するような b の値の範囲は

$$\frac{\boxed{\text{ウ}}}{3} < b \leqq \frac{\boxed{\text{エ}}}{3}$$

である。

(2)　p，q を実数とし，$p < q$ とする。

　$p < x < q$ を満たす整数 x がちょうど二つ存在するための必要条件は $\boxed{\text{オ}}$ である。

$\boxed{\text{オ}}$ については，最も適当なものを，次の⓪～⑧のうちから一つ選べ。

⓪ $0 < q - p < 2$	① $0 \leqq q - p < 2$	② $0 < q - p \leqq 2$
③ $1 < q - p < 3$	④ $1 \leqq q - p < 3$	⑤ $1 < q - p \leqq 3$
⑥ $2 < q - p < 4$	⑦ $2 \leqq q - p < 4$	⑧ $2 < q - p \leqq 4$

（数学 I，数学 A 第 1 問は次ページに続く。）

(3)　太郎さんと花子さんは，次の**問題**について話している。

$\boxed{\text{問題}}$　c を正の実数とする。x の不等式

$$c < x < 4c + \frac{1}{2} \qquad \cdots\cdots ①$$

について考える。① を満たす整数 x がちょうど二つ存在するような c の値の範囲を求めよ。

太郎：(2)が利用できそうだね。

花子：計算してみるね ……。あ，c の整数部分が求められたよ。

太郎：それなら，条件を満たす整数 x の値が二つともわかるから，**問題**が解けそうだね。

①を満たす整数 x がちょうど二つ存在するとき，実数 c の整数部分は $\boxed{\text{カ}}$ であるから，①を満たす二つの整数 x の値は $\boxed{\text{キ}}$ と $\boxed{\text{キ}}$ $+1$ である。

よって，① を満たす整数 x がちょうど二つ存在するような c の値の範囲は

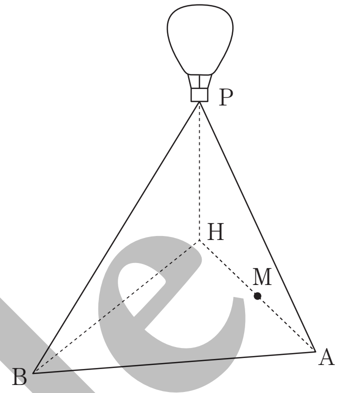
$$\frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}} < c \leqq \frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{ケ}}}$$

である。

（数学Ｉ，数学Ａ 第１問は次ページに続く。）

〔2〕 以下の問題を解答するにあたっては，必要に応じて 7 ページの三角比の表を用いてもよい。

以下では，気球 P は点とみなし，目の高さは無視して考えるものとする。



太郎さんは地点 A から気球 P を見上げ，花子さんは地点 B から気球 P を見上げている。気球 P の真下の地点 H は，地点 A，B と同じ標高であり，$\angle\mathrm{HAB} = 75^\circ$，$\angle\mathrm{HBA} = 45^\circ$ であった。2 地点 A と B との距離を a とするとき

$$\mathrm{AH} = \frac{\sqrt{\boxed{\text{サ}}}}{\boxed{\text{シ}}}a$$

となる。

(1) 地点 A から気球 P を見上げた角度が 30° であったとき，気球 P の高さ PH は

$$\mathrm{PH} = \frac{\sqrt{\boxed{\text{ス}}}}{\boxed{\text{セ}}}a$$

である。

（数学 **I**，数学 **A** 第 **1** 問は次ページに続く。）

(2)　太郎さんは，気球をもっと近くで見たいと思い，AHの中点Mまで行って気球を見上げた。太郎さんと花子さんは，地点Mから気球Pを見上げた角度について話している。ただし，太郎さんが近づく間，気球は動いていないものとする。

太郎：とても良く見えたけど，見上げたとき首が痛くなったよ。いったい見上げた角度は何度だったのか調べようと思ったんだけど，持っていた三角比の表が 45° までしかなかったんだ。もう半分の 45° から 90° の表をどこかに落としてしまったみたい。どうしよう。

花子：大丈夫。0° から 45° までの表があったら，三角比の関係式から 45° から 90° までの値もわかるよ。

$0^\circ < \theta < 90^\circ$ とするとき，θ と $90^\circ - \theta$ の三角比の関係から

$\sin(90^\circ-\theta)=\boxed{\text{ソ}}$，$\cos(90^\circ-\theta)=\boxed{\text{タ}}$，$\tan(90^\circ-\theta)=\boxed{\text{チ}}$

である。

したがって，∠PMHの大きさは $\boxed{\text{ツ}}$。

ただし，$\sqrt{2}=1.414$，$\sqrt{3}=1.732$，$\sqrt{6}=2.449$ として利用してもよい。

$\boxed{\text{ソ}}$ ～ $\boxed{\text{チ}}$ の解答群(同じものを繰り返し選んでもよい。)

⓪ $\sin\theta$　① $\cos\theta$　② $\tan\theta$　③ $\dfrac{1}{\sin\theta}$　④ $\dfrac{1}{\cos\theta}$　⑤ $\dfrac{1}{\tan\theta}$

$\boxed{\text{ツ}}$ の解答群

⓪ 45° より大きく 48° 以下である
① 48° より大きく 51° 以下である
② 51° より大きく 54° 以下である
③ 54° より大きく 57° 以下である
④ 57° より大きく 60° 以下である

(数学Ⅰ，数学Ａ第１問は７ページに続く。)

〔3〕 △ABC において AB = 7，BC = 8，CA = 5 とする。△ABC の外心を P，内心を Q とするとき，線分 PQ の長さを求めよう。

このとき

$$\cos A = \frac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}}$$

$$\mathrm{AP} = \frac{\boxed{\text{ナ}}\sqrt{\boxed{\text{ニ}}}}{\boxed{\text{ヌ}}}$$

であり，△ABC の内接円と辺 BC の接点を D とすると

$$\mathrm{QD} = \sqrt{\boxed{\text{ネ}}}$$

$$\mathrm{CD} = \boxed{\text{ノ}}$$

である。したがって

$$\mathrm{PQ} = \frac{\sqrt{\boxed{\text{ハヒ}}}}{\boxed{\text{フ}}}$$

である。

第２問 （配点　30）

〔1〕 △OAB において，OA = 4，OB = 5，AB = 3 とする。点 P は O を出発し，毎秒 1 の速さで，線分 OA 上を A まで移動し，その後，同じ速さで，線分 AB 上を B まで移動する。P から辺 OB に垂線を引き，辺 OB との交点を Q とする。P が O を出発してから t 秒後の △APQ の面積を $f(t)$ とする。

P が A に到達するのは $t = \boxed{\text{ア}}$ のときである。

$0 < t < \boxed{\text{ア}}$ のとき

$$\mathrm{PQ} = \boxed{\boxed{\text{イ}}}\,t$$

であり

$$f(t) = -\boxed{\boxed{\text{ウ}}}\left(t^2 - \boxed{\text{エ}}\,t\right)$$

である。

$\boxed{\text{ア}} < t < 7$ のとき

$$\mathrm{PQ} = \boxed{\boxed{\text{オ}}}\,(7 - t)$$

であり

$$f(t) = -\boxed{\boxed{\text{カ}}}\left(t^2 - \boxed{\text{キク}}\,t + \boxed{\text{ケコ}}\right)$$

である。

$\boxed{\boxed{\text{イ}}}$，$\boxed{\boxed{\text{ウ}}}$，$\boxed{\boxed{\text{オ}}}$，$\boxed{\boxed{\text{カ}}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい。）

⓪ $\dfrac{3}{5}$	① $\dfrac{4}{5}$	② $\dfrac{6}{25}$	③ $\dfrac{8}{25}$
④ $\dfrac{9}{25}$	⑤ $\dfrac{12}{25}$	⑥ $\dfrac{16}{25}$	⑦ $\dfrac{9}{50}$

（数学 I，数学 A 第 2 問は次ページに続く。）

$t = \boxed{\text{ア}}$ のとき，$f(t) = 0$ として，$0 < t < 7$ における $f(t)$ の最大値を M とすると

$$M = \frac{\boxed{\text{サシ}}}{\boxed{\text{スセ}}}$$

である。また，$f(t)$ に関する次の ⓪～③ の記述のうち，正しいものは $\boxed{\text{ソ}}$ である。

$\boxed{\text{ソ}}$ の解答群

⓪　$f(t) = M$ となる t の値は 2 個ある。
①　$f(t) = \dfrac{2}{3}M$ となる t の値は 2 個ある。
②　$f(t) = \dfrac{1}{2}M$ となる t の値は 2 個ある。
③　$f(t) = \dfrac{1}{3}M$ となる t の値は 2 個ある。

（数学Ⅰ，数学Ａ第２問は次ページに続く。）

解　説

第１問

〔１〕（数学Ⅰ　数と式）　**【難易度…★】**

⑴　$1<x<1+a$ を満たす整数 x がちょうど二つ存在するとき，その x の値は２と３であるから，$1<x<1+a$ を満たす整数 x がちょうど二つ存在するための必要十分条件は

$$3<1+a\leqq 4$$

$$\mathbf{2}<a\leqq \mathbf{3}$$

である。

$\frac{1}{3}<x<\frac{1}{3}+b$ を満たす整数 x がちょうど二つ存在するとき，その x の値は１と２であるから，$\frac{1}{3}<x<\frac{1}{3}+b$ を満たす整数 x がちょうど二つ存在するための必要十分条件は

$$2<\frac{1}{3}+b\leqq 3$$

$$\frac{\mathbf{5}}{3}<b\leqq\frac{\mathbf{8}}{3}$$

である。

⑵　$p<x<q$ を満たす整数 x がちょうど二つ存在するとき

$$n-1\leqq p<n \text{ かつ } n+1<q\leqq n+2$$

を満たす整数 n が存在するから

$$(n+1)-n<q-p\leqq(n+2)-(n-1)$$

$$1<q-p\leqq 3$$

が成り立つ。よって，⓪～⑧のうち，$p<x<q$ を満たす整数 x がちょうど二つ存在するための必要条件であるのは

$$1<q-p\leqq 3 \quad (\text{⑤})$$

である。

（注）　$p=-0.1$，$q=1.1$ のとき，$p<x<q$ を満たす整数 x はちょうど二つ存在し，$q-p=1.2$ であるから，⑥，⑦，⑧は $p<x<q$ を満たす整数 x がちょうど二つ存在するための必要条件ではない。
また，$p=0$，$q=3$ のとき，$p<x<q$ を満たす整数 x はちょうど二つ存在し，$q-p=3$ であるから，⓪，①，②，③，④は，$p<x<q$ を満たす整数 x がちょうど二つ存在するための必要条件ではない。

⑶　⑵より

$$c<x<4c+\frac{1}{2} \qquad \cdots\cdots①$$

を満たす整数 x がちょうど二つ存在するためには

$$1<\left(4c+\frac{1}{2}\right)-c\leqq 3$$

$$\frac{1}{6}<c\leqq\frac{5}{6}$$

が必要である。よって，①を満たす整数 x がちょうど二つ存在するとき，c の整数部分は **0** であるから，①を満たす二つの整数 x の値は **1** と２である。
したがって，①を満たす整数 x の値がちょうど二つ存在するための必要十分条件は

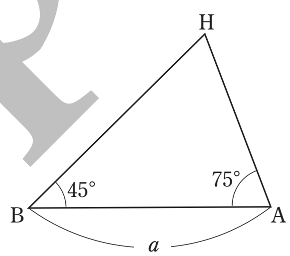
$$\frac{1}{6}<c\leqq\frac{5}{6} \text{ かつ } 2<4c+\frac{1}{2}\leqq 3$$

よって

$$\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{8}}<c\leqq\frac{\mathbf{5}}{8}$$

である。

〔２〕（数学Ⅰ　図形と計量）　**【難易度…★】**



$\triangle$AHB において

$$\angle \mathrm{AHB}=180^\circ-(45^\circ+75^\circ)=60^\circ$$

正弦定理を用いると

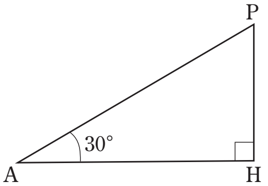
$$\frac{\mathrm{AH}}{\sin 45^\circ}=\frac{a}{\sin 60^\circ}$$

$$\mathrm{AH}=\frac{\sin 45^\circ}{\sin 60^\circ}a$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}a$$

$$=\frac{\sqrt{\mathbf{6}}}{\mathbf{3}}a$$

(1)



$\triangle$PAH において

$$\tan 30^\circ = \frac{\mathrm{PH}}{\mathrm{AH}}$$

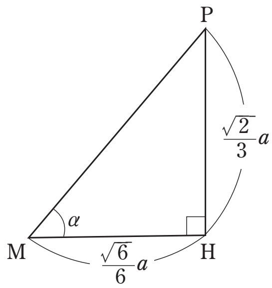
$$\begin{aligned}\mathrm{PH} &= \mathrm{AH}\tan 30^\circ \\ &= \frac{\sqrt{6}}{3}a \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \\ &= \boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{3}}a\end{aligned}$$

(2) θ と $90^\circ - \theta$ の三角比の関係から

$\sin(90^\circ - \theta) = \cos\theta$ （①）

$\cos(90^\circ - \theta) = \sin\theta$ （⓪）

$\tan(90^\circ - \theta) = \dfrac{1}{\tan\theta}$ （⑤）



$\triangle$PMH において，$\angle$PMH$=\alpha$ とおくと，

$\mathrm{MH} = \dfrac{1}{2}\mathrm{AH} = \dfrac{\sqrt{6}}{6}a$ より

$$\begin{aligned}\tan(90^\circ - \alpha) &= \frac{1}{\tan\alpha} \\ &= \frac{\mathrm{MH}}{\mathrm{PH}} \\ &= \frac{\frac{\sqrt{6}}{6}a}{\frac{\sqrt{2}}{3}a} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= 0.866\end{aligned}$$

三角比の表より

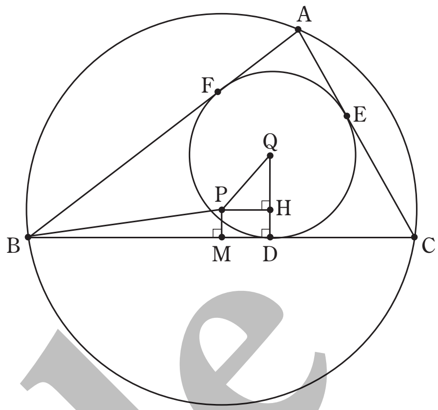
$\tan 40^\circ = 0.8391$，$\tan 41^\circ = 0.8693$

よって

$40^\circ < 90^\circ - \alpha < 41^\circ$

$49^\circ < \alpha < 50^\circ$ （①）

〔3〕（数学Ⅰ　図形と計量）　**【難易度…★】**



$\triangle$ABC に余弦定理を用いると

$$\begin{aligned}\cos A &= \frac{7^2 + 5^2 - 8^2}{2 \cdot 7 \cdot 5} \\ &= \frac{10}{2 \cdot 7 \cdot 5} \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{7}}\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}\sin A &= \sqrt{1 - \cos^2 A} \\ &= \sqrt{1 - \frac{1}{49}} \\ &= \frac{4\sqrt{3}}{7}\end{aligned}$$

AP は $\triangle$ABC の外接円の半径であるから，正弦定理を用いると

$$2\mathrm{AP} = \frac{8}{\sin A}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{AP} &= \frac{8}{2 \cdot \frac{4\sqrt{3}}{7}} \\ &= \frac{7}{\sqrt{3}} \\ &= \boldsymbol{\frac{7\sqrt{3}}{3}}\end{aligned}$$

$\triangle$ABC の面積を S とすると

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 5 \cdot \sin A \\ &= \frac{35}{2} \cdot \frac{4\sqrt{3}}{7} \\ &= 10\sqrt{3}\end{aligned}$$

QD は △ABC の内接円の半径であるから

$S=\dfrac{1}{2}\mathrm{QD}(\mathrm{AB}+\mathrm{BC}+\mathrm{CA})$ より

$$\frac{1}{2}(7+8+5)\cdot\mathrm{QD}=10\sqrt{3}$$

$$\mathrm{QD}=\boldsymbol{\sqrt{3}}$$

△ABC の内接円と辺 CA，AB の接点をそれぞれ E，F とする。

$$\mathrm{AE}=\mathrm{AF},\ \mathrm{BD}=\mathrm{BF},\ \mathrm{CD}=\mathrm{CE}$$

であるから，$\mathrm{CD}=x$，$\mathrm{AE}=y$，$\mathrm{BD}=z$ とおくと

$$\begin{cases} x+y=5 & \cdots\cdots ① \\ y+z=7 & \cdots\cdots ② \\ z+x=8 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

①＋②＋③ より

$$2(x+y+z)=20$$

$$x+y+z=10 \qquad \cdots\cdots ④$$

④－② より

$$x=\mathbf{3}$$

辺 BC の中点を M とすると，P は △ABC の外心であるから，△BMP において，$\mathrm{BP}=\mathrm{AP}=\dfrac{7\sqrt{3}}{3}$，$\mathrm{BM}=4$，$\angle\mathrm{BMP}=90^\circ$ である。

したがって，三平方の定理より

$$\mathrm{PM}=\sqrt{\left(\frac{7\sqrt{3}}{3}\right)^2-4^2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

QD＞PM であるから，P から線分 QD に垂線 PH を引くと，HD＝PM より

$$\begin{aligned}\mathrm{QH}&=\mathrm{QD}-\mathrm{HD}\\&=\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}\\&=\frac{2\sqrt{3}}{3}\end{aligned}$$

PH＝MD＝CM－CD＝4－3＝1 より，△QPH に三平方の定理を用いて

$$\begin{aligned}\mathrm{PQ}&=\sqrt{1^2+\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2}\\&=\frac{\boldsymbol{\sqrt{21}}}{\mathbf{3}}\end{aligned}$$

第２問

〔１〕（数学Ⅰ　２次関数）　　【難易度…★★】

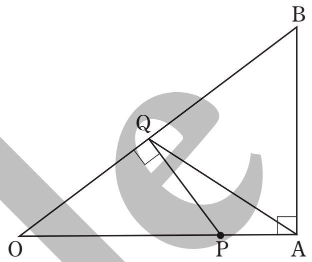
OA＝4，OB＝5，AB＝3 であるから，△OAB は $\angle\mathrm{OAB}=90^\circ$ の直角三角形である。

$$\sin\angle\mathrm{AOB}=\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{OB}}=\frac{3}{5}$$

$$\cos\angle\mathrm{AOB}=\frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OB}}=\frac{4}{5}$$

P が A に到達するのは $t=\mathbf{4}$ のときである。

・$0<t<4$ のとき　$\mathrm{OP}=t$



△OPQ において

$$\mathrm{PQ}=\mathrm{OP}\sin\angle\mathrm{AOB}=\frac{3}{5}t \quad (⓪)$$

$$\mathrm{OQ}=\mathrm{OP}\cos\angle\mathrm{AOB}=\frac{4}{5}t$$

であるから，直角三角形 OPQ の面積は

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{OPQ}&=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{OQ}\cdot\mathrm{PQ}\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}t\cdot\frac{3}{5}t\\&=\frac{6}{25}t^2\end{aligned}$$

さらに，$\mathrm{OP}:\mathrm{PA}=t:(4-t)$ であるから

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{APQ}&=\frac{4-t}{t}\triangle\mathrm{OPQ}\\&=\frac{4-t}{t}\cdot\frac{6}{25}t^2\\&=\frac{6}{25}t(4-t)\end{aligned}$$

よって

$$f(t)=-\frac{6}{25}(t^2-\mathbf{4}t) \quad (②)$$