第１問～第４問は，**いずれか３問を選択**し，解答しなさい。

第１問 （選択問題） （配点　16）

（1）　次の**問題 1** について考えよう。

> **問題 1**　$S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(n-k)$，$T_n = \displaystyle\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=j}^{n}k\right)$ とする。S_n，T_n を求めよ。

(i)　S_n を求めよう。S_n を記号 $\sum$ を用いないで表すと

$$S_n = (n-1)+(n-2)+\cdots+2+1+0$$

であるから

$$S_n = \frac{1}{\boxed{\text{ア}}} \times \boxed{\text{イ}}$$

である。

（数学Ⅱ，数学B，数学C第１問は次ページに続く。）

（ii）　T_n を求めよう。T_n を記号 $\sum$ を用いないで表すと

$$
\begin{aligned}
T_n &= \sum_{j=1}^{n}\{j+(j+1)+\cdots+(n-1)+n\} \\
&= 1+2+3+\cdots+(n-1)+n \\
&\qquad +2+3+\cdots+(n-1)+n \\
&\qquad\qquad +3+\cdots+(n-1)+n \\
&\qquad\qquad\qquad \vdots \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad +(n-1)+n \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +n
\end{aligned}
$$

であるから

$$T_n = \frac{1}{\boxed{\text{ウ}}} \times \boxed{\text{エ}}$$

である。

$\boxed{\text{イ}}$，$\boxed{\text{エ}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい。）

⓪　$(n-1)n$	①　$n(n+1)$
②　$(n+1)(n+2)$	③　$(n-1)n(n+1)$
④　$n(n+1)(n+2)$	⑤　$(n+1)(n+2)(n+3)$
⑥　$(n-1)n(2n-1)$	⑦　$n(n+1)(2n+1)$
⑧　$(n+1)(n+2)(2n+3)$	

（数学Ⅱ，数学B，数学C第１問は次ページに続く。）

(2)　次の**問題 2** について考えよう。

> **問題 2**　　$a_1 = 1$，$a_{n+1} = 2a_n + 4^n$（$n = 1$，2，3，$\cdots$）　　$\cdots\cdots$①
> で定められた数列の一般項を求めよ。

(i)　太郎さんと花子さんは**問題 2** に取り組んでいる。

> 太郎：$b_n = \dfrac{a_n}{2^n}$ とおいてみたらどうかな。
> 花子：そうすると，数列 $\{b_n\}$ の階差数列の一般項がわかるね。

$b_n = \dfrac{a_n}{2^n}$（$n = 1$，2，3，$\cdots$）とおくと

$$b_1 = \frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$$

であり，① は

$$b_{n+1} - b_n = \boxed{\text{キ}}$$

となる。

よって，$n \geqq 2$ のとき

$$b_n = \boxed{\text{ク}} - \frac{1}{\boxed{\text{ケ}}}$$

である。

$\boxed{\text{キ}}$，$\boxed{\text{ク}}$ の解答群(同じものを繰り返し選んでもよい。)

⓪　2^{n-1}	①　2^n	②　2^{n+1}
③　4^{n-1}	④　4^n	⑤　4^{n+1}

(数学Ⅱ，数学B，数学C第 1 問は次ページに続く。)

(ii)　二人は**問題２**について引き続き話をしている。

太郎：他に方法はないかな。
花子：$c_n = a_n + p \cdot 4^n$ とおいて，数列 $\{c_n\}$ が等比数列となるような定数 p の値を求めれば良いと思うよ。

p を定数とし，$c_n = a_n + p \cdot 4^n$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とおくと

$$p = \frac{\boxed{コサ}}{\boxed{シ}}$$

のとき，数列 $\{c_n\}$ は初項 $\boxed{スセ}$，公比 $\boxed{ソ}$ の等比数列となる。

(iii)　数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = \frac{1}{\boxed{タ}} \times \left(\boxed{チ}\right)$$

である。

$\boxed{チ}$ の解答群

⓪ $4^{n-1} - 2^{n-1}$	① $4^n - 2^n$	② $4^{n+1} - 2^{n+1}$
③ $4^{n-1} + 2^{n-1}$	④ $4^n + 2^n$	⑤ $4^{n+1} + 2^{n+1}$

第1問〜第4問は，いずれか3問を選択し，解答しなさい。

第2問 （選択問題）（配点　16）

以下の問題を解答するにあたっては，必要に応じて11ページの正規分布表を用いてもよい。

工場 A で生産されるお菓子全体を母集団とし，この母集団におけるお菓子1個の重さ(単位は g)を表す確率変数を X とする。X は平均 m，標準偏差 σ の正規分布 $N(m,\ \sigma^2)$ に従っているとする。

(1)　$m = 35$，$\sigma = 4.8$ とする。

(i)　工場 A で生産されるお菓子1個あたりの重さが 41 g 以上になる確率を求めてみよう。

確率変数 Z を $Z = \dfrac{X - m}{\sigma}$ とすると，Z は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従うので

$$P(X \geqq 41) = P\left(Z \geqq \boxed{\text{ア}}.\boxed{\text{イウ}}\right)$$
$$= \boxed{\boxed{\text{エ}}}$$

である。

$\boxed{\boxed{\text{エ}}}$ については，最も適当なものを，次の ⓪〜③ のうちから一つ選べ。

⓪ 0.1056	① 0.1112	② 0.3888	③ 0.3944

(数学Ⅱ，数学B，数学C第2問は次ページに続く。)

(ii)　工場Aでは，生産されたお菓子を無作為に9個選び，箱に詰めて商品としている。箱1個の重さは10gである。

このとき，商品1個あたりの重さを表す確率変数をYとすると

Yの平均は　$\boxed{\text{オカキ}}.\boxed{\text{ク}}$

Yの標準偏差は　$\boxed{\text{ケコ}}.\boxed{\text{サ}}$

である。

（数学Ⅱ，数学B，数学C第２問は次ページに続く。）

(2)　m の値がわかっていないものとする。

(i)　母平均 m の値を推定してみよう。

工場Aで生産されるお菓子を無作為に100個選び，重さを量ってみたところ，標本平均 $\overline{X}$ は38であった。ただし，$\sigma = 4.8$ とする。このとき，m に対する信頼度95％の信頼区間は $\boxed{\text{シ}}$ である。

$\boxed{\text{シ}}$ については，最も適当なものを，次の⓪～⑤のうちから一つ選べ。

⓪　$36.97 \leqq m \leqq 39.03$	①　$37.00 \leqq m \leqq 39.00$
②　$37.03 \leqq m \leqq 38.97$	③　$37.06 \leqq m \leqq 38.94$
④　$37.09 \leqq m \leqq 38.91$	⑤　$37.12 \leqq m \leqq 38.88$

(ii)　工場Bでも同じお菓子を作っている。工場Bで生産されるお菓子1個の重さの母平均は37，母標準偏差は4.8である。このとき，工場Aで生産されるお菓子1個の重さの母平均 m は，工場Bの平均と異なるかどうかを，(i)のデータをもとに，有意水準5％で仮説検定してみよう。

そのため，帰無仮説を「$\boxed{\text{ス}}$」とし，対立仮説を「$\boxed{\text{セ}}$」とする。

帰無仮説が正しいとすると，標本平均 $\overline{X}$ は平均 $\boxed{\text{ソ}}$，標準偏差 $\boxed{\text{タ}}$ の正規分布に従うので，確率変数 U を

$$U = \frac{\overline{X} - \boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}}$$

とおくと，U は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

正規分布表より

$$P\left(|U| \leqq \boxed{\text{チ}}\right) \fallingdotseq 0.95$$

であるから，有意水準5％の棄却域は $|U| > \boxed{\text{チ}}$ である。

$\overline{X}$ の値が38であるとき，U の値は $\boxed{\text{ツ}}.\boxed{\text{テト}}$ であるから，帰無仮説は $\boxed{\text{ナ}}$。よって，工場Aで生産されるお菓子1個の重さの母平均は，工場Bの平均と $\boxed{\text{ニ}}$。

（数学Ⅱ，数学B，数学C第2問は次ページに続く。）

$\boxed{\text{ス}}$，$\boxed{\text{セ}}$ の解答群

⓪ m は 37 である	① m は 38 である
② m は 37 ではない	③ m は 38 ではない

$\boxed{\text{ソ}}$，$\boxed{\text{タ}}$ の解答群

⓪ 0.048	① 0.48	② 4.8
③ 48	④ 37	⑤ 38

$\boxed{\text{チ}}$ の解答群

⓪ 1.64	① 1.96	② 2.33	③ 2.58

$\boxed{\text{ナ}}$ の解答群

⓪ 棄却される	① 棄却されない

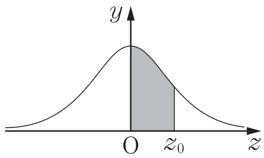
$\boxed{\text{ニ}}$ の解答群

⓪ 異なるといえる	① 異なるとはいえない

（数学Ⅱ，数学B，数学C第２問は11ページに続く。）

正規分布表

次の表は，標準正規分布の分布曲線における右図の灰色部分の面積の値をまとめたものである。



z_0	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990

第１問～第４問は，いずれか３問を選択し，解答しなさい。

第３問 （選択問題） （配点　16）

（1）　１辺の長さが k の正四面体 ABCD があり，辺 AB の中点を M，辺 CD の中点を N とする。

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\frac{k^2}{\boxed{\text{ア}}}$$

であり

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}=\overrightarrow{\mathrm{MN}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{MN}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}=\boxed{\text{イ}}$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{MN}}|=\frac{\sqrt{\boxed{\text{ウ}}}}{\boxed{\text{エ}}}k$$

である。

（数学Ⅱ，数学B，数学C第３問は14ページに続く。）

(2)　O を原点とする座標空間に 3 点 E(0, 0, 6), P(−1, 2, −1), Q(1, 1, 1) がある。直線 OP を ℓ，点 E を通り直線 OQ と平行な直線を m とし，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{p}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\vec{q}$ とおく。$\vec{p}\cdot\vec{q}=0$ であるから，直線 ℓ 上に 2 点 A，B をとり，直線 m 上に 2 点 C，D をとって，4 点 A，B，C，D が正四面体の 4 頂点をなすようにする。

まず，辺 AB の中点 M，辺 CD の中点 N について考えよう。

点 M が ℓ 上，点 N が m 上にあることから，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}$，$\overrightarrow{\mathrm{ON}}$ は実数 s，t を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=s\,\vec{p},\qquad \overrightarrow{\mathrm{ON}}=\overrightarrow{\mathrm{OE}}+t\,\vec{q}$$

と表される。このとき，$\overrightarrow{\mathrm{MN}}\cdot\vec{p}=\overrightarrow{\mathrm{MN}}\cdot\vec{q}=\boxed{\text{オ}}$ であるから

$$s=\boxed{\text{カキ}},\qquad t=\boxed{\text{クケ}}$$

である。よって，2 点 M，N の座標は

$$\mathrm{M}\left(\boxed{\text{コ}},\ \boxed{\text{サシ}},\ \boxed{\text{ス}}\right),$$
$$\mathrm{N}\left(\boxed{\text{セソ}},\ \boxed{\text{タチ}},\ \boxed{\text{ツ}}\right)$$

である。

（数学Ⅱ，数学B，数学C第３問は次ページに続く。）

次に，2点A，Cについて考えよう。ただし，点Aのz座標は点Bのz座標より大きく，点Cのz座標は点Dのz座標より大きいとする。

$|\overrightarrow{\mathrm{MN}}| = \boxed{\text{テ}}\sqrt{\boxed{\text{ト}}}$ であるから，正四面体ABCDの1辺の長さは，(1)を利用すると $\boxed{\text{ナ}}$ である。よって，$\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{AM}}|}{|\overrightarrow{p}|} = \dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ニ}}}}{\boxed{\text{ヌ}}}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = -\frac{\boxed{\text{ネ}} + \sqrt{\boxed{\text{ノ}}}}{\boxed{\text{ハ}}}\overrightarrow{p}$$

である。同様にして

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \overrightarrow{\mathrm{ON}} + \sqrt{3}\,\overrightarrow{q}$$

である。

第１問～第４問は，**いずれか３問を選択**し，解答しなさい。

第４問 （選択問題） （配点　16）

〔1〕 双曲線がもつ**性質**に次のようなものがある。

性質

双曲線上の点を通る漸近線に平行な２本の直線と２本の漸近線で囲まれる平行四辺形の面積は，点の位置によらず一定となる。

このことを確かめてみよう。

双曲線の方程式を $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$）とする。漸近線を $\ell_1: y=\dfrac{b}{a}x$，$\ell_2: y=-\dfrac{b}{a}x$ とし，双曲線上の点を $\mathrm{P}(p,\ q)$ とする。

P を通り ℓ_1 に平行な直線と ℓ_2 との交点の座標は $\boxed{\text{ア}}$ であり，P を通り ℓ_2 に平行な直線と ℓ_1 との交点の座標は $\boxed{\text{イ}}$ である。

したがって，これら４本の直線で囲まれる平行四辺形の面積は $\boxed{\text{ウ}}$ で表される。P が双曲線上の点であることに注目すると，$\boxed{\text{ウ}}=\boxed{\text{エ}}$ となるから，P の位置によらず面積は一定である。

（数学Ⅱ，数学B，数学C第４問は次ページに続く。）

ア，イ の解答群

⓪ $\left(\dfrac{bp+aq}{2b},\ \dfrac{bp+aq}{2a}\right)$	① $\left(\dfrac{bp+aq}{2b},\ \dfrac{bp-aq}{2a}\right)$
② $\left(\dfrac{bp+aq}{2b},\ \dfrac{aq-bp}{2a}\right)$	③ $\left(\dfrac{bp+aq}{2b},\ -\dfrac{bq+ap}{2a}\right)$
④ $\left(\dfrac{bp-aq}{2b},\ \dfrac{bp-aq}{2a}\right)$	⑤ $\left(\dfrac{bp-aq}{2b},\ \dfrac{aq-bp}{2a}\right)$

ウ の解答群

⓪ $\dfrac{a^2q^2-b^2p^2}{2ab}$	① $\dfrac{a^2q^2-b^2p^2}{ab}$
② $\dfrac{b^2p^2-a^2q^2}{2ab}$	③ $\dfrac{b^2p^2-a^2q^2}{ab}$

エ の解答群

⓪ ab	① $2ab$	② $\dfrac{ab}{2}$
③ $\dfrac{1}{ab}$	④ $\dfrac{2}{ab}$	⑤ $\dfrac{1}{2ab}$

（数学Ⅱ，数学B，数学C第４問は次ページに続く。）

〔2〕 $z=\sqrt{3}+i$ (i は虚数単位)とする。

(1) z を極形式で表すと

$$z=\boxed{\text{オ}}\left(\cos\frac{\pi}{\boxed{\text{カ}}}+i\sin\frac{\pi}{\boxed{\text{カ}}}\right)$$

である。

(2) $w=\dfrac{z}{\boxed{\text{オ}}}$ とおくと，w^{11} の実部は $\boxed{\text{キ}}$，虚部は $\boxed{\text{ク}}$ である。

$\boxed{\text{キ}}$，$\boxed{\text{ク}}$ の解答群(同じものを繰り返し選んでもよい。)

⓪ 1	① $\dfrac{1}{2}$	② $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	③ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
④ -1	⑤ $-\dfrac{1}{2}$	⑥ $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	⑦ $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(数学Ⅱ，数学B，数学C第４問は次ページに続く。)

(3)　n を自然数とする。複素数平面上で，複素数 z^n を表す点を P_n とし，$(\overline{z})^n$ を表す点を Q_n とする。また，1 を表す点を A とする。ただし，$\overline{z}$ は z と共役な複素数である。

点 P_n が虚軸上にあるような最小の n は

$n =$ $\boxed{\text{ケ}}$

であり，このとき線分 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n$ の長さは

$\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n =$ $\boxed{\text{コサ}}$

である。また，7 本の線分

AP_1，　$\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$，　$\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3$，　AQ_1，　$\mathrm{Q}_1\mathrm{Q}_2$，　$\mathrm{Q}_2\mathrm{Q}_3$，　$\mathrm{P}_3\mathrm{Q}_3$

で囲まれる図形の面積は $\boxed{\text{シス}}$ である。

解　説

第１問　（数学Ｂ　数列）　【難易度…★★】

(1)(i)　S_n を記号 $\sum$ を用いないで表すと

$$S_n=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1+0$$
$$=0+1+2+\cdots+(n-2)+(n-1)$$

である。これは初項 0，末項 $n-1$，項数 n の等差数列の和であるから

$$S_n=\frac{1}{2}n\{0+(n-1)\}=\frac{1}{\mathbf{2}}(n-1)n \quad (⓪)$$

である。

(ii)　(i)と同じく，T_n を記号 $\sum$ を用いないで表すと

$$\begin{aligned}T_n&=\sum_{j=1}^{n}\{j+(j+1)+\cdots+(n-1)+n\}\\&=1+2+3+\cdots+(n-1)+n\\&\quad\ \ +2+3+\cdots+(n-1)+n\\&\qquad\quad +3+\cdots+(n-1)+n\\&\qquad\qquad\qquad \vdots\\&\qquad\qquad\qquad +(n-1)+n\\&\qquad\qquad\qquad\qquad\quad +n\end{aligned}$$

である。

並んだ数を縦にみると，1 が 1 個，2 が 2 個，3 が 3 個，…，n が n 個あり，それぞれの和は 1^2，2^2，3^2，…，n^2 となるから

$$\begin{aligned}T_n&=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2\\&=\sum_{i=1}^{n}i^2\\&=\frac{1}{\mathbf{6}}n(n+1)(2n+1) \quad (⑦)\end{aligned}$$

である。

(注)　直接計算すると

$$\begin{aligned}T_n&=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=j}^{n}k\right)\\&=\sum_{j=1}^{n}\frac{(n-j+1)(j+n)}{2}\\&=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\{-j^2+j+n(n+1)\}\\&=\frac{1}{2}\left\{-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}+n(n+1)\cdot n\right\}\\&=\frac{1}{2}\left\{-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}(1+2n)\right\}\\&=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\end{aligned}$$

である。

(2)　　$a_1=1$，

$$a_{n+1}=2a_n+4^n \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \quad \cdots\cdots①$$

(i)　$b_n=\dfrac{a_n}{2^n}$ とおくと

$$b_1=\frac{a_1}{2^1}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$$

であり，①の両辺を $2^{n+1}(=2\cdot2^n)$ で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}=\frac{a_n}{2^n}+\frac{1}{2}\cdot2^n$$

より

$$b_{n+1}-b_n=2^{n-1} \quad (⓪)$$

である。よって，$n\geqq2$ のとき

$$\begin{aligned}b_n&=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}2^{k-1}\\&=\frac{1}{2}+\frac{2^{n-1}-1}{2-1}\\&=2^{n-1}-\frac{1}{\mathbf{2}} \quad (⓪)\end{aligned}$$

である。これは $n=1$ のときも成り立つ。

(ii)　p を定数とし，$c_n=a_n+p\cdot4^n$ とおくと

$$a_n=c_n-p\cdot4^n$$

であり，①に代入すると

$$c_{n+1}-p\cdot4^{n+1}=2(c_n-p\cdot4^n)+4^n$$
$$c_{n+1}=2c_n+(2p+1)4^n$$

となる。よって

$$2p+1=0,\ すなわち\ p=-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$$

のとき，$c_{n+1}=2c_n$ となり，数列 $\{c_n\}$ は初項

$c_1=a_1-\dfrac{1}{2}\cdot4^1=\mathbf{-1}$，公比 **2** の等比数列となる。

(iii)　数列 $\{a_n\}$ の一般項は，(i)の結果より

$$\frac{a_n}{2^n}=2^{n-1}-\frac{1}{2}$$

$$a_n=2^n\left(\frac{1}{2}\cdot2^n-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{\mathbf{2}}(4^n-2^n) \quad (①)$$

である。

(注)　(ii)の結果を用いるならば，$c_n=-1\cdot2^{n-1}$ であるから

$$a_n-\frac{1}{2}\cdot4^n=-1\cdot2^{n-1}$$

$$a_n=\frac{1}{2}(4^n-2^n)$$

となる。

第２問　（数学Ｂ　統計的な推測）　【難易度…★★】

(1)(i)　確率変数 X が正規分布 $N(35,\ 4.8^2)$ に従うとき，確率変数 Z を

$$Z=\frac{X-35}{4.8}$$

とおくと，Z は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

$X \geqq 41$ のとき

$$Z \geqq \frac{41-35}{4.8}=\frac{6}{4.8}=1.25$$

であるから

$$P(X \geqq 41)=P(Z \geqq \mathbf{1.25})$$
$$=0.5-P(0 \leqq Z \leqq 1.25)$$

正規分布表より

$$P(0 \leqq Z \leqq 1.25)=0.3944$$

であるから

$$P(X \geqq 41)=0.5-0.3944$$
$$=0.1056 \quad (⓪)$$

(ii) 無作為に選ばれた 9 個のお菓子の重さを表す確率変数を X_1，X_2，…，X_9 とすると，X_1，X_2，…，X_9 は独立であるから，平均と分散について

平均　$E(X_1)=E(X_2)=\cdots=E(X_9)=35$

分散　$V(X_1)=V(X_2)=\cdots=V(X_9)=4.8^2=23.04$

が成り立つ。このとき

$$Y=X_1+X_2+\cdots+X_9+10$$

であるから，Y の平均は

$$E(Y)=E(X_1)+E(X_2)+\cdots+E(X_9)+10$$
$$=35\cdot 9+10$$
$$=\mathbf{325.0}$$

Y の分散は

$$V(Y)=V(Y_1)+V(Y_2)+\cdots+V(Y_9)$$
$$=4.8^2\cdot 9=207.36$$

Y の標準偏差は

$$\sigma(Y)=\sqrt{4.8^2\cdot 9}=4.8\cdot 3=\mathbf{14.4}$$

(2)(i) 無作為に選ばれたお菓子 100 個の重さの標本平均 $\overline{X}$ は 38 であり，母標準偏差 σ は 4.8 であるから，母平均 m に対する信頼度 95％の信頼区間は

$$38-1.96\cdot\frac{4.8}{\sqrt{100}} \leqq m \leqq 38+1.96\cdot\frac{4.8}{\sqrt{100}}$$
$$38-0.9408 \leqq m \leqq 38+0.9408$$
$$37.0592 \leqq m \leqq 38.9408$$

よって

$$37.06 \leqq m \leqq 38.94 \quad (③)$$

(ii) 帰無仮説を「工場 A で生産されるお菓子 1 個の重さの母平均 m は，工場 B の平均と同じである」すなわち

「m は 37 である」(⓪)

とし，対立仮説を「工場 A で生産されるお菓子 1 個の重さの母平均 m は，工場 B の平均と異なる」すなわち

「m は 37 ではない」(②)

とする。

帰無仮説が正しいとすると，標本平均 $\overline{X}$ は

平均 37，標準偏差 $\dfrac{4.8}{\sqrt{100}}=0.48$　(④，①)

の正規分布に従うので，確率変数 U を

$$U=\frac{\overline{X}-37}{0.48}$$

とおくと，U は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

正規分布表より

$$P(|U| \leqq 1.96) \fallingdotseq 2\cdot 0.4750=0.95 \quad (①)$$

であるから，有意水準 5％の棄却域は $|U|>1.96$ である。

$\overline{X}=38$ のとき

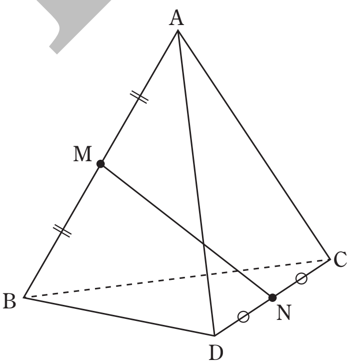
$$U=\frac{38-37}{0.48}=\frac{1}{0.48}\fallingdotseq\mathbf{2.08}$$

であり，$U \fallingdotseq 2.08$ は棄却域に入るから，帰無仮説は棄却される。(⓪)

よって，工場 A で生産されるお菓子 1 個の重さの母平均は，工場 B の平均と異なるといえる。(⓪)

第３問 （数学Ｃ　ベクトル）　【難易度…★★】

(1)



$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{d}$ とおく。四面体 ABCD は 1 辺の長さが k の正四面体より

$$|\vec{b}|=|\vec{c}|=|\vec{d}|=k$$

であり

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=|\vec{b}||\vec{c}|\cos\angle\mathrm{BAC}$$
$$=k\cdot k\cdot\cos 60^\circ$$
$$=\frac{k^2}{\mathbf{2}}$$

である。同様にすると

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}=|\vec{c}||\vec{d}|\cos\angle\mathrm{CAD}=\frac{k^2}{2}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=|\vec{d}||\vec{b}|\cos\angle\mathrm{BAD}=\frac{k^2}{2}$$

である。また，点 M，N はそれぞれ辺 AB，CD の中点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\frac{\vec{b}}{2},\quad \overrightarrow{\mathrm{AN}}=\frac{\vec{c}+\vec{d}}{2}$$

と表せる。

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}&=\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{AD}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)\\&=\vec{b}\cdot\left(\vec{d}-\vec{c}\right)\\&=\frac{k^2}{2}-\frac{k^2}{2}\\&=\mathbf{0}\end{aligned}$$

である。また

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{MN}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}&=\left(\overrightarrow{\mathrm{AN}}-\overrightarrow{\mathrm{AM}}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}\\&=\frac{\vec{c}+\vec{d}-\vec{b}}{2}\cdot\vec{b}\\&=\frac{k^2}{4}+\frac{k^2}{4}-\frac{k^2}{2}\\&=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{MN}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}&=\left(\overrightarrow{\mathrm{AN}}-\overrightarrow{\mathrm{AM}}\right)\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{AD}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)\\&=\frac{\vec{c}+\vec{d}-\vec{b}}{2}\cdot\left(\vec{d}-\vec{c}\right)\\&=\frac{1}{2}\left(|\vec{d}|^2-|\vec{c}|^2\right)-\frac{1}{2}\left(\vec{b}\cdot\vec{d}-\vec{b}\cdot\vec{c}\right)\\&=\frac{1}{2}\left(k^2-k^2\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{k^2}{2}-\frac{k^2}{2}\right)\\&=0\end{aligned}$$

である。また

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{\mathrm{MN}}\right|^2&=\left|\frac{\vec{c}+\vec{d}-\vec{b}}{2}\right|^2\\&=\frac{1}{4}\left\{|\vec{c}|^2+|\vec{d}|^2+|\vec{b}|^2+2\vec{c}\cdot\vec{d}-2\vec{d}\cdot\vec{b}-2\vec{b}\cdot\vec{c}\right\}\\&=\frac{k^2}{2}\end{aligned}$$

$$\therefore\quad \left|\overrightarrow{\mathrm{MN}}\right|=\frac{\boldsymbol{\sqrt{2}}}{\mathbf{2}}k$$

である。

(注) △NAB は AN＝NB の二等辺三角形であり，AM＝MB より MN⊥AB である。よって，$\overrightarrow{\mathrm{MN}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$ である。

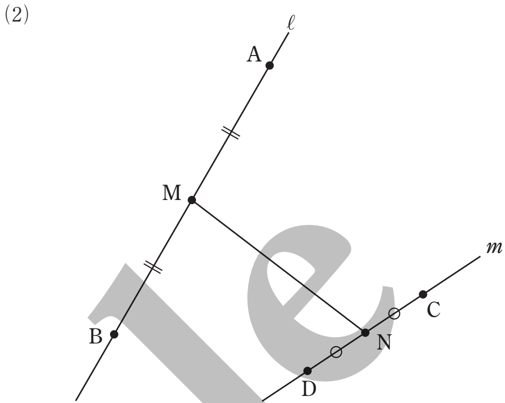
同様にすると，△MCD は CM＝MD の二等辺三角形であり，CN＝ND より MN⊥CD である。よって，$\overrightarrow{\mathrm{MN}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}=0$ である。

また，直角三角形 AMN において，三平方の定理を用いると

$$\begin{aligned}\mathrm{MN}&=\sqrt{\mathrm{AN}^2-\mathrm{AM}^2}\\&=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}k\right)^2-\left(\frac{k}{2}\right)^2}\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}k\end{aligned}$$

とすることもできる。

(2)



$$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=(0,\ 0,\ 6)$$
$$\vec{p}=(-1,\ 2,\ -1),\quad \vec{q}=(1,\ 1,\ 1)$$

より

$$|\vec{p}|=\sqrt{(-1)^2+2^2+(-1)^2}=\sqrt{6}$$
$$|\vec{q}|=\sqrt{1^2+1^2+1^2}=\sqrt{3}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OE}}\cdot\vec{p}=0\cdot(-1)+0\cdot2+6\cdot(-1)=-6$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OE}}\cdot\vec{q}=0\cdot1+0\cdot1+6\cdot1=6$$
$$\vec{p}\cdot\vec{q}=(-1)\cdot1+2\cdot1+(-1)\cdot1=0$$

である。

点 M，N はそれぞれ ℓ，m 上にあるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=s\vec{p},\quad \overrightarrow{\mathrm{ON}}=\overrightarrow{\mathrm{OE}}+t\vec{q} \qquad \cdots\cdots①$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{\mathrm{MN}}=\overrightarrow{\mathrm{ON}}-\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\overrightarrow{\mathrm{OE}}+t\vec{q}-s\vec{p}$$

と表せる。

また，$\vec{p}\parallel\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{MN}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{MN}}\perp\vec{p}\qquad\therefore\quad \overrightarrow{\mathrm{MN}}\cdot\vec{p}=\mathbf{0}$$

であり，$\vec{q}\parallel\overrightarrow{\mathrm{CD}}$，$\overrightarrow{\mathrm{MN}}\perp\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{MN}}\perp\vec{q}\qquad\therefore\quad \overrightarrow{\mathrm{MN}}\cdot\vec{q}=0$$

である。ここで

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{MN}}\cdot\vec{p}&=\left(\overrightarrow{\mathrm{OE}}+t\vec{q}-s\vec{p}\right)\cdot\vec{p}\\&=\overrightarrow{\mathrm{OE}}\cdot\vec{p}+t\vec{p}\cdot\vec{q}-s|\vec{p}|^2\\&=-6-6s\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{MN}}\cdot\vec{q}&=\left(\overrightarrow{\mathrm{OE}}+t\vec{q}-s\vec{p}\right)\cdot\vec{q}\\&=\overrightarrow{\mathrm{OE}}\cdot\vec{q}+t|\vec{q}|^2-s\vec{p}\cdot\vec{q}\\&=6+3t\end{aligned}$$