第１部
数学Ⅰ・A，Ⅱ・B・C
標準編

第２部
数学Ⅲ
標準編

第３部
数学Ⅰ・A，Ⅱ・B・C
発展編

付録
数学Ⅰ・A，Ⅱ・B・C
追加補充編

第 1 回 多項式の展開
Standard Stage

目 標 すべての計算の基本である「式の展開」を速く正確にできるようになる。

動画視聴用
二次元
コード

革命計算法
Revolutionary Technique

問題 1 – 1 から問題 1 – 7 まで, すべて与えられた式を展開し整理すること。このときに途中の計算の式を書かずに一気に (展開して整理した) 結果を書くようにすること (途中の計算は頭の中で行うこと)。

どうしても難しい場合に限り途中の計算を 1, 2 行書いてもよいが, 極力途中の式を書かずに結果を書くようにすること (そうでないと効果が薄れてしまう)。

例 1

$(x^2+4x+1)(3x-4)$ 程度であれば, 一気に頭の中で計算して

$$(x^2+4x+1)(3x-4) = 3x^3+8x^2-13x-4$$

のみを書くようにする。

例 2

$(x^2+x-4)(x^2-3x+2)$ の場合も, 一気に頭の中で計算して

$$(x^2+x-4)(x^2-3x+2) = x^4-2x^3-5x^2+14x-8$$

のみを書くようにする。

例 3

$(x+3)(x-4)(x+2)$ の場合は, 次の程度であれば途中を書いてもよいが, できるだけ一気に計算し, 結果のみを書くこと。

$$\begin{aligned}(x+3)(x-4)(x+2) &= (x^2-x-12)(x+2)\\ &= x^3+x^2-14x-24\end{aligned}$$

問題 1 − 1	今週のテーマ **多項式の展開**						
	1	2	3	4	5	6	7

制限時間 A：5 分	実施日　　月　　日	得点　　／8
制限時間 B：8 分	実施日　　月　　日	得点　　／8

次の式を展開して整理せよ。

(1)　$(x^2+3x+1)(4x-3)$

(2)　$(x^2-4x-2)(2x-5)$

(3)　$(2x^2-4x+3)(3x+7)$

(4)　$(3x^2+x-2)(-3x+1)$

(5)　$(2x^2-5x-4)(4x-5)$

(6)　$(4x^3-2x^2+3x+4)(2x-3)$

(7)　$(2x^3-5x^2+2x-3)(-3x+4)$

(8)　$(5x^3-4x^2+x-3)(3x+5)$

問題 $\mathbf{1-1}$ 解答

(1) $\boldsymbol{4x^3 + 9x^2 - 5x - 3}$

(2) $\boldsymbol{2x^3 - 13x^2 + 16x + 10}$

(3) $\boldsymbol{6x^3 + 2x^2 - 19x + 21}$

(4) $\boldsymbol{-9x^3 + 7x - 2}$

(5) $\boldsymbol{8x^3 - 30x^2 + 9x + 20}$

(6) $\boldsymbol{8x^4 - 16x^3 + 12x^2 - x - 12}$

(7) $\boldsymbol{-6x^4 + 23x^3 - 26x^2 + 17x - 12}$

(8) $\boldsymbol{15x^4 + 13x^3 - 17x^2 - 4x - 15}$

第14回 極限の計算
Standard Stage

目標

[1] 不定形の極限のうち簡単に解決するものの速算法をマスターする。

[2] 不定形ではない「$\dfrac{a}{0}$ $(a \neq 0)$ 型の極限」に慣れる。

動画視聴用二次元コード

革命計算法
Revolutionary Technique

[1] 極限の速算法

以下の極限の計算方法は万能ではないが，はさみうちの原理を必要としない極限の中では多くの場合に適用できるので理解して使えるようにしておくとよい。

まず，基本変形として次の 5 パターンをあげよう。ただし，どの場合も $\square \to 0$ の場合である。

(1) $\sin\square$ が不定形に関わっている場合

$$\sin\square = \frac{\sin\square}{\square} \times \square$$

(2) $1 - \cos\square$ が不定形に関わっている場合

$$1 - \cos\square = \frac{1 - \cos\square}{\square^2} \times \square^2$$

(3) $\tan\square$ が不定形に関わっている場合

$$\tan\square = \frac{\tan\square}{\square} \times \square$$

(4) $e^{\square} - 1$ が不定形に関わっている場合

$$e^{\square} - 1 = \frac{e^{\square} - 1}{\square} \times \square$$

(5) $\log(1 + \square)$ が不定形に関わっている場合

$$\log(1 + \square) = \frac{\log(1 + \square)}{\square} \times \square$$

それでは，これらについて順に説明していこう。

(1)　**sin □ が不定形に関わっている場合**

例えば，極限 $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{x}$ は $\dfrac{0}{0}$ 型の不定形であるが，この極限において $\sin 3x$ は $\dfrac{0}{0}$ を作る要因になっている。

このように □ $\to 0$ であり，sin □ が極限の不定形を作る要因になっている場合は sin □ の部分を

$$\textbf{sin}\,\square = \frac{\textbf{sin}\,\square}{\square} \times \square$$

のように変形して $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ であることを用いて極限を計算するとよい。ただし，変形した後は $\dfrac{\sin \square}{\square}$ の部分は 1 に近づく部分であるから (つまり極限がわかっている部分であるからこの部分を) 決して動かしてはならない。

例 1

$\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{x}$ は次のように求める。

$\sin 3x$ はこの極限の中で不定形に関わっており，また $x \to 0$ のとき $3x \to 0$ であるから $\sin 3x$ の部分を

$$\sin 3x = \frac{\sin 3x}{3x} \times 3x$$

の形に変形する (つまり，$\sin 3x$ の部分を $\dfrac{\sin 3x}{3x} \times 3x$ に置き換える)。このようにして

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{x} &= \lim_{x \to 0} \frac{\dfrac{\sin 3x}{3x} \times 3x}{x} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{3x} \times \frac{3x}{x} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{3x} \times 3 \\ &= 1 \times 3 \\ &= 3\end{aligned}$$

を得る。

例 2

$\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin(2x + 3x^2)}{\sin 4x}$ は次のように求める。

問題 14ー1	今週のテーマ **極限の計算**						
	1	2	3	4	5	6	7

制限時間 A： **3** 分	実施日　　月　　日	得点　　╱5
制限時間 B： **5** 分	実施日　　月　　日	得点　　╱5

次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 2x}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{\sin 4x}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{x\sin 3x}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x\sin 2x}{1-\cos 5x}$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin(4x^2+3x^3)}{\cos 3x-1}$

問題 14−1 解答

(1) $\mathbf{\dfrac{5}{2}}$ (2) $\mathbf{\dfrac{3}{4}}$ (3) $\mathbf{\dfrac{8}{3}}$ (4) $\mathbf{\dfrac{12}{25}}$ (5) $\mathbf{-\dfrac{8}{9}}$

【参考】

(1)
$$\lim_{x\to0}\frac{\sin 5x}{\sin 2x}=\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{\sin 5x}{5x}\cdot 5x}{\dfrac{\sin 2x}{2x}\cdot 2x}=\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{\sin 5x}{5x}}{\dfrac{\sin 2x}{2x}}\cdot\frac{5}{2}$$
$$=\frac{5}{2}$$

(2)
$$\lim_{x\to0}\frac{\tan 3x}{\sin 4x}=\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{\tan 3x}{3x}\cdot 3x}{\dfrac{\sin 4x}{4x}\cdot 4x}=\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{\tan 3x}{3x}}{\dfrac{\sin 4x}{4x}}\cdot\frac{3}{4}$$
$$=\frac{3}{4}$$

(3)
$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos 4x}{x\sin 3x}=\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{1-\cos 4x}{(4x)^2}\cdot(4x)^2}{x\cdot\dfrac{\sin 3x}{3x}\cdot 3x}=\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{1-\cos 4x}{(4x)^2}}{\dfrac{\sin 3x}{3x}}\cdot\frac{16}{3}$$
$$=\frac{\dfrac{1}{2}}{1}\cdot\frac{16}{3}=\frac{8}{3}$$

(4)
$$\lim_{x\to0}\frac{\tan 3x\sin 2x}{1-\cos 5x}=\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{\tan 3x}{3x}\cdot 3x\cdot\dfrac{\sin 2x}{2x}\cdot 2x}{\dfrac{1-\cos 5x}{(5x)^2}\cdot(5x)^2}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{\tan 3x}{3x}\cdot\dfrac{\sin 2x}{2x}}{\dfrac{1-\cos 5x}{(5x)^2}}\cdot\frac{6}{25}=\frac{1\cdot1}{\dfrac{1}{2}}\cdot\frac{6}{25}=\frac{12}{25}$$

(5)
$$\lim_{x\to0}\frac{\sin(4x^2+3x^3)}{\cos 3x-1}=\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{\sin(4x^2+3x^3)}{4x^2+3x^3}\cdot(4x^2+3x^3)}{-\dfrac{1-\cos 3x}{(3x)^2}\cdot(3x)^2}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{\sin(4x^2+3x^3)}{4x^2+3x^3}}{-\dfrac{1-\cos 3x}{(3x)^2}}\cdot\frac{4+3x}{9}=\frac{1}{-\dfrac{1}{2}}\cdot\frac{4}{9}$$
$$=-\frac{8}{9}$$

第19回 Advanced Stage 多項式の展開とその応用

目標 多項式の展開と三角関数の加法定理を用いた計算を一気にできるようになる。

革命計算法
Revolutionary Technique

1 根号を含む 2 つ以上の項の計算

例えば,

$$(a+\sqrt{b})^2 = a^2+2a\sqrt{b}+b = (a^2+b)+2a\sqrt{b}$$
$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 = a+2\sqrt{ab}+b = (a+b)+2\sqrt{ab}$$

であるが, これを次のように一気に計算したい。

(1) $(3+2\sqrt{5})^2 = 29+12\sqrt{5}$

(2) $(\sqrt{5}+3\sqrt{2})^2 = 23+6\sqrt{10}$

この章では, このような項を 2 つ以上含む式を展開して整理する操作を手短にできるようになることを目指す。

例 1

(1) $(3+2\sqrt{2})^2+(\sqrt{7}-\sqrt{3})^2 = 27+12\sqrt{2}-2\sqrt{21}$

(2) $$\begin{aligned}(2+\sqrt{3}+\sqrt{5})^2+(2-\sqrt{3}+\sqrt{5})^2 &= 2(2+\sqrt{5})^2+2\cdot 3\\ &= 24+8\sqrt{5}\end{aligned}$$

[注]

(2) は $(A+B)^2+(A-B)^2 = 2A^2+2B^2$ であることを用いてある。

2 三角関数の加法定理を用いた計算

三角関数の加法定理

$$\sin(\alpha\pm\beta) = \sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta \quad (複号同順)$$
$$\cos(\alpha\pm\beta) = \cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta \quad (複号同順)$$

を用いて, 次のような計算を行う。

$$\sin(\theta+30^\circ)+\sin(\theta-30^\circ)$$

これを $a\sin\theta+b\cos\theta$ の形に変形する。実際に途中経過も書いて計算すると次のようになるが，この程度であれば一気に最後の答を書きたい。

$$\begin{aligned}&\sin(\theta+30^\circ)+\sin(\theta-30^\circ)\\&=(\sin\theta\cos30^\circ+\cos\theta\sin30^\circ)+(\sin\theta\cos30^\circ-\cos\theta\sin30^\circ)\\&=2\sin\theta\cos30^\circ\\&=\sqrt{3}\sin\theta\end{aligned}$$

実際には次のようにここでは計算するようにする。

例2

(1)　$\sin(\theta+30^\circ)+\sin(\theta+120^\circ)=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}\sin\theta+\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\cos\theta$

(2)　$\cos(\theta+45^\circ)+\cos(\theta+135^\circ)=-\sqrt{2}\sin\theta$

(1) については，まず次のようになる。

$$\begin{aligned}&\sin(\theta+30^\circ)+\sin(\theta+120^\circ)\\&\quad=(\sin\theta\cos30^\circ+\cos\theta\sin30^\circ)+(\sin\theta\cos120^\circ+\cos\theta\sin120^\circ)\end{aligned}$$

ここで，$\sin\theta$ の係数 $(\cos30^\circ+\cos120^\circ)$ と $\cos\theta$ の係数 $(\sin30^\circ+\sin120^\circ)$ を選び，それぞれを頭の中で計算すると次のようになる。

$$\cos30^\circ+\cos120^\circ=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

$$\sin30^\circ+\sin120^\circ=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

このようにして (1) の結果である $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}\sin\theta+\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\cos\theta$ を得る。

(2) についても同様である。

問題 19－1	今週のテーマ 多項式の展開とその応用						
	1	2	3	4	5	6	7

制限時間 A： 3 分	実施日　　月　　日	得点　　／5
制限時間 B： 5 分	実施日　　月　　日	得点　　／5

次の式を展開して整理せよ。

(1)　$(1+\sqrt{3})^2+(2+\sqrt{3})^2$

(2)　$(2-\sqrt{2})^2+(3+\sqrt{2})^2$

(3)　$(4+\sqrt{3})^2+(2+3\sqrt{3})^2$

(4)　$(-2+\sqrt{5})^2+(3-\sqrt{5})^2$

(5)　$(2-3\sqrt{2})^2+(3+\sqrt{2})^2$

問題 19 − 1 解答

(1) $\mathbf{11+6\sqrt{3}}$ (2) $\mathbf{17+2\sqrt{2}}$ (3) $\mathbf{50+20\sqrt{3}}$

(4) $\mathbf{23-10\sqrt{5}}$ (5) $\mathbf{33-6\sqrt{2}}$