はじめに

数学を学ぶとき，教科書を開くと多くの定理・公式が並んでいます．中には一見しただけでは何を意味しているのか，どのように使うのかわかりにくいものもあります．これは，定理・公式がさまざまな問題に適用することができるよう抽象的に表現されているからです．したがって，それらを理解するために，最初はどんな定理・公式でも具体的な問題で繰り返し使ってみることが大切です．学習はスポーツや楽器の演奏に似たところがあり，正しいフォームを身につけ，それに習熟するには反復練習が必要なのです．

この『カルキュール』は，教科書の学習だけではどうしても不足しがちな計算練習を補充することを目的に編集されました．「カルキュール」とはフランス語で「計算」を意味します．本書には基本的な計算問題が数多く収録されています．この計算にはゲーム感覚で取り組んでみることをお勧めします．また，「習うより慣れろ」という諺(ことわざ)もあります．最初はわからない部分があっても，頑張って計算練習を続けてみてください．きっと，いつのまにか教科書の内容が理解できるようになり，数学のおもしろさもわかってくることでしょう．

みなさんが本書を活用して十分な効果を上げ，さらに勉学にいそしんでくれることを願っています．なお，本書の出版にあたっては駿台文庫の方々に大変お世話になりました．紙面を借りて御礼申し上げます．

榎　　明夫
阪本　敦子
吉川　浩之

本書の特長と利用法

特長

1　いつでも，どこでも，時間がなくても始められる

数学Ⅰ･Ａの全分野を29セクションに分割し，それぞれ独立した構成としてあります．したがって，どこからでも始めることができます．また，時間に余裕がないときには，問題番号の頭に＊を記したものだけに取り組んでも十分効果が得られるよう配慮してあります．

2　レベルに合わせた計算練習ができる

237の問題を「基本問題」「標準問題」の2レベルに分けてあります．

3　計算の経過がわかる

「解答・解説編」では，計算の経過を詳細に，わかりやすく記してあります．

4　答え合わせがすぐできる

答は一覧にして問題巻末に収録してあります．

5　基本事項のまとめがついている

必要な計算法則などは「基本事項のまとめ」として各セクションのはじめに掲載してあります．

利用法

1　高校の教科書と一緒に使用するとき

「基本問題」は教科書の練習問題レベル,「標準問題」はこれよりやや難しいレベルです.自分に必要なレベルの問題に取り組んでください.

2　受験対策の初歩として使用するとき

はじめから「全部やろう」などと考えないで，できそうなところから始めていきましょう．

休まず・あせらず・急がず進めましょう！

目　次

§1　整式の計算

基本事項のまとめ

▶式の整理

同類項をまとめ，項を次数の高いものから順に並べることを降べきの順に整理するという．

▶式の計算

（左辺から右辺への変形が展開，右辺から左辺への変形が因数分解）

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2,\quad (a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

$(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3,\quad (a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3,\quad (a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

基本問題

1 次の多項式を（　）内の文字について降べきの順に整理し，そのときの各項の係数と定数項を答えよ．

(1)　$3ax^2-2ay+4x-y-3$　(a)

(2)　$a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)$　(a)

2 次の式を展開せよ．

(1)　$(2a-3b)^2$　　(2)　$(x^2-3y)(x^2+3y)$

(3)　$(a+2b-3c)^2$　　(4)　$(2x-3y)^3$

3 次の式を因数分解せよ．

(1)　$9a^2-6a+1$　　(2)　$2x^2-8y^2$

*(3)　$2a^2+5ab+2b^2$　　*(4)　$6x^2-5x-1$

*(5)　$6x^2-5x+1$　　(6)　$3a^2b^2-10abc+3c^2$

*(7)　x^3-8y^3　　(8)　x^2-y^2+2y-1

標準問題

4 次の式を展開せよ.

(1) $(a+2b)^2(a-2b)^2$　*(2) $(x-y+z)(x+y-z)$

*(3) $(a-b+c-d)(a+b+c+d)$　(4) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$

*(5) $(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)$　(6) $(ab+bc+ca)^2$

(7) $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

*(8) $(x+2y)(x-2y)(x^2+2xy+4y^2)(x^2-2xy+4y^2)$

5 次の式を簡単にせよ.

(1) $(2a+b)^3-(a-2b)^3$

(2) $(2x+y)(4x^2-2xy+y^2)-(x-2y)(x^2+2xy+4y^2)$

(3) $(a+b-c)^2+(a-b-c)^2$

(4) $(a+b-c)(a+b+c)-(a-b+c)(a+b-c)$

6 次の式を因数分解せよ.

(1) $2a^2-8ab+8b^2$　(2) $2a^2+13a+6$

*(3) $6x^2-11x+4$　*(4) $18x^2+39x-24$

(5) $2x^2+(3a-10)x-15a$　(6) $abx^2-(a^2+b^2)xy+aby^2$

*(7) $x^2+(4a+1)x+3a^2+5a-2$　*(8) $a^2+5ab+6b^2+a+b-2$

(9) $6x^2+5xy+y^2-7x-3y+2$　*(10) $2a^2+5ab+2b^2+5a+b-3$

7 次の式を因数分解せよ.

(1) x^4-y^4　(2) $(x^2+y^2)^2-4x^2y^2$

(3) a^4-8a^2-9　(4) $8a^3+27b^3$

*(5) $x^3y^3-z^3$　*(6) a^6+7a^3-8

*(7) $x^4+x^2y^2+y^4$　(8) x^4-7x^2+1

(9) $x^3+ax+a+1$　(10) $a^3-ab^2+b^2c-a^2c$

*(11) $ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-a)$

(12) $(a+b)(b+c)(c+a)+abc$

§6 2次関数のグラフ

基本事項のまとめ

▶ $\boldsymbol{y = ax^2}$ **(**$\boldsymbol{a \neq 0}$**) のグラフ**

グラフは放物線で，軸は y 軸 ($x = 0$)，頂点は原点

$a > 0$ のとき，下に凸，$a < 0$ のとき，上に凸

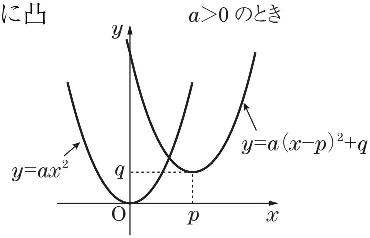
▶ $\boldsymbol{y = a(x - p)^2 + q}$ **(**$\boldsymbol{a \neq 0}$**) のグラフ**

放物線 $y = ax^2$ を x 軸方向に p,

y 軸方向に q だけ平行移動したもの

軸の方程式は $x = p$

頂点の座標は $(p,\ q)$



▶ $\boldsymbol{y = ax^2 + bx + c}$ **(**$\boldsymbol{a \neq 0}$**) のグラフ**

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

放物線 $y = ax^2$ を平行移動したもの

軸の方程式は $x = -\dfrac{b}{2a}$　　頂点の座標は $\left(-\dfrac{b}{2a},\ -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$

y 軸との交点は $(0, c)$

▶ $\boldsymbol{y = f(x)}$ **のグラフの移動**

平行移動 …… x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動したものは

$y - q = f(x - p)$ すなわち $y = f(x - p) + q$

対称移動 …… x 軸に関して対称移動したものは　$y = -f(x)$

y 軸に関して対称移動したものは　$y = f(-x)$

原点に関して対称移動したものは　$y = -f(-x)$

基本問題

39 次の方程式で表される放物線の軸の方程式と頂点の座標を求めよ.

(1) $y = -2x^2$　　(2) $y = 3x^2 - 1$

(3) $y = -(x + 1)^2$　　(4) $y = 2(x - 3)^2 - 5$

(5) $y = x^2 + 2x - 1$　　*(6) $y = -x^2 + 4x - 4$

(7) $y = 2x^2 - x$　　*(8) $y = -3x^2 - 5x + 1$

40 次の関数のグラフをかけ．

(1)　$y=-x^2$　　(2)　$y=\dfrac{1}{2}x^2$

(3)　$y=2x^2-2$　　(4)　$y=-x^2+2$

*(5)　$y=-(x-1)^2+1$　　*(6)　$y=(x-2)^2-3$

***41** $y=-2x^2$ を，次のように移動した 2 次関数の方程式を求めよ．

(1)　x 軸方向に 2，y 軸方向に 4 だけ平行移動

(2)　x 軸に関して対称移動　　(3)　y 軸に関して対称移動

標準問題

42 次の関数のグラフをかけ．また，軸の方程式と頂点の座標を求めよ．

(1)　$y=-x^2+6x$　　(2)　$y=3x^2-9x$

*(3)　$y=-2x^2+4x+1$　　(4)　$y=x^2-2x+5$

*(5)　$y=-\dfrac{1}{2}x^2+x-\dfrac{1}{2}$　　(6)　$y=\dfrac{1}{3}x^2-2x-\dfrac{1}{2}$

(7)　$y=(x-3)(x+1)$　　*(8)　$y=(2x-1)(x+2)$

43 グラフが次の条件を満たす 2 次関数の方程式を求めよ．

(1)　$y=-2x^2+3x+1$ を x 軸方向に 3，y 軸方向に -2 だけ平行移動したもの

*(2)　$y=3x^2-x+4$ を x 軸方向に $-\dfrac{1}{2}$，y 軸方向に $\dfrac{1}{4}$ だけ平行移動したもの

(3)　$y=-2x^2+4x$ を x 軸に関して対称に移動したもの

(4)　$y=x^2-2x+2$ を y 軸に関して対称に移動したもの

*(5)　$y=2x^2-3x+4$ を原点に関して対称に移動したもの

44 グラフが次の条件を満たす 2 次関数の方程式を求めよ．

*(1)　頂点の座標が $(0,7)$ で，点 $(2,3)$ を通るもの

(2)　頂点の座標が $(3,1)$ で，点 $(4,-1)$ を通るもの

*(3)　軸の方程式が $x=-1$ で，2 点 $(1,-5)$，$(-2,1)$ を通るもの

(4)　軸の方程式が $x=3$ で，2 点 $(0,0)$，$(1,1)$ を通るもの

(5)　3 点 $(0,0)$，$(1,1)$，$(-1,1)$ を通るもの

*(6)　3 点 $(-1,7)$，$(1,-5)$，$(2,1)$ を通るもの

§23　直線図形の基本性質

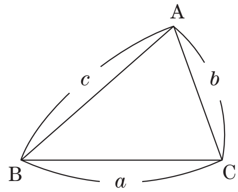
基本事項のまとめ

▶三角形の成立条件

$a,\ b,\ c$ が三角形の 3 辺の長さとなる条件

$a+b>c,\quad b+c>a,\quad c+a>b$

$(|a-b|<c<a+b)$



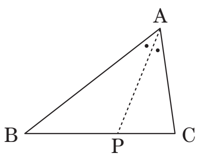
▶三角形の辺と角の大小関係

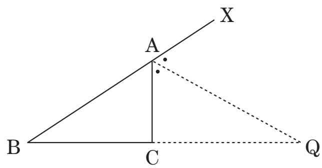
$c>b \iff C>B$

▶三角形の角の二等分線と比

$\angle\mathrm{BAP}=\angle\mathrm{CAP} \iff \mathrm{BP}:\mathrm{CP}=\mathrm{AB}:\mathrm{AC}$

$\angle\mathrm{XAQ}=\angle\mathrm{CAQ} \iff \mathrm{BQ}:\mathrm{CQ}=\mathrm{AB}:\mathrm{AC}$





▶チェバの定理　図 1 で $\dfrac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\dfrac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}\cdot\dfrac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=1$

▶メネラウスの定理　図 2 で $\dfrac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\dfrac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}\cdot\dfrac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=1$

図 1

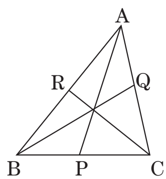
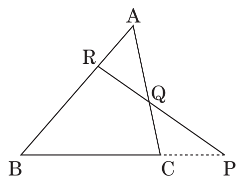


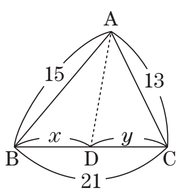
図 2



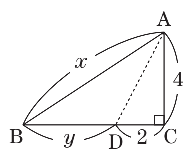
基本問題

180 図で $\angle\mathrm{BAD}=\angle\mathrm{CAD}$ のとき，x，y の長さを求めよ．

*(1)



(2)



標準問題

***181** 3辺の長さが $x+5$, $2x+1$, $4x$ である三角形がある.

(1) x のとり得る値の範囲を求めよ.

(2) この三角形が鋭角二等辺三角形となるような x の値を求めよ.

***182** $\mathrm{AB}=5$, $\mathrm{BC}=7$, $\mathrm{CA}=3$ の $\triangle\mathrm{ABC}$ がある. $\angle\mathrm{BAC}$ の二等分線と辺BCの交点をD, $\angle\mathrm{BAC}$ の外角の二等分線と辺BCの延長との交点をEとするとき, DEの長さを求めよ.

***183** △ABCの辺BCの中点をMとするとき, 次を証明せよ.

(1) $\mathrm{AB}+\mathrm{AC}>2\mathrm{AM}$ である.

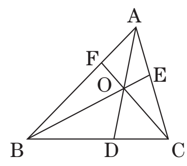
(2) $\mathrm{AB}>\mathrm{AC}$ ならば $\angle\mathrm{BAM}<\angle\mathrm{CAM}$ である.

***184** △OABにおいて, 辺ABを $2:1$ に内分する点をP, 線分OPを $k:(1-k)$ に内分する点をQとし, 2直線AQ, OBの交点をRとする. ただし, $0<k<1$ である.

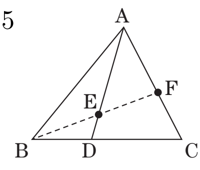
(1) $\dfrac{\mathrm{OR}}{\mathrm{OB}}$ を k を用いて表せ.

(2) $\mathrm{PR}\,/\!/\,\mathrm{AO}$ になるとき, k の値を求めよ.

***185** 図で $\mathrm{BD}:\mathrm{DC}=3:2$ $\mathrm{AE}:\mathrm{EC}=3:4$ のとき, $\mathrm{AF}:\mathrm{FB}$, $\mathrm{BO}:\mathrm{OE}$, $\mathrm{CO}:\mathrm{CF}$ を求めよ.



***186** 図で $\mathrm{BD}:\mathrm{DC}=2:3$, $\mathrm{AE}:\mathrm{ED}=7:2$, $\mathrm{AF}:\mathrm{FC}=7:5$ のとき, 3点B, E, Fは同一直線上にあることを示せ.



***187** 三角形の3つの内角の二等分線は1点で交わることを示せ.

§1　整式の計算

1

←1 つの文字について，次数の高い方から並べる．

(1) $\boldsymbol{(3x^2-2y)a+(4x-y-3)}$　←a の 1 次式と考える．

$\boldsymbol{a}$ の係数　$\boldsymbol{3x^2-2y}$

定数項　$\boldsymbol{4x-y-3}$

(2) $\boldsymbol{(c-b)a^2+(b^2-c^2)a+(bc^2-b^2c)}$　←a の 2 次式と考える．

$\boldsymbol{a^2}$ の係数　$\boldsymbol{c-b}$

$\boldsymbol{a}$ の係数　$\boldsymbol{b^2-c^2}$

定数項　$\boldsymbol{bc^2-b^2c}$

2

←展開公式を用いる．

(1) $(与式)=(2a)^2-2\cdot 2a\cdot 3b+(3b)^2=\boldsymbol{4a^2-12ab+9b^2}$

(2) $(与式)=(x^2)^2-(3y)^2=\boldsymbol{x^4-9y^2}$

(3) $(与式)=a^2+(2b)^2+(-3c)^2$

$$+2a\cdot 2b+2\cdot 2b\cdot(-3c)+2(-3c)\cdot a$$

$$=\boldsymbol{a^2+4b^2+9c^2+4ab-12bc-6ca}$$

(4) $(与式)=(2x)^3-3(2x)^2(3y)+3(2x)(3y)^2-(3y)^3$

$$=\boldsymbol{8x^3-36x^2y+54xy^2-27y^3}$$

3

(1) $(与式)=\boldsymbol{(3a-1)^2}$　←因数分解の公式を用いる．

(2) $(与式)=2(x^2-4y^2)=\boldsymbol{2(x+2y)(x-2y)}$　←まず，2 をくくり出す．

(3) $(与式)=\boldsymbol{(a+2b)(2a+b)}$

(4) $(与式)=\boldsymbol{(6x+1)(x-1)}$

(5) $(与式)=\boldsymbol{(3x-1)(2x-1)}$

(6) $(与式)=\boldsymbol{(ab-3c)(3ab-c)}$

(7) $(与式)=x^3-(2y)^3=\boldsymbol{(x-2y)(x^2+2xy+4y^2)}$

(8) $(与式)=x^2-(y-1)^2=\{x+(y-1)\}\{x-(y-1)\}$

$$=\boldsymbol{(x+y-1)(x-y+1)}$$

4

(1) $(与式)=(a^2-4b^2)^2=\boldsymbol{a^4-8a^2b^2+16b^4}$　←まず $(a+2b)(a-2b)$ を計算する．

(2) $(与式)=\{x-(y-z)\}\{x+(y-z)\}=x^2-(y-z)^2$

(3)　両辺に $1+\sqrt{2}$ をかけて

$$7+a\sqrt{2}=(b+9\sqrt{2})(1+\sqrt{2})$$

$$=b+18+(b+9)\sqrt{2}$$

$$b+11+(b+9-a)\sqrt{2}=0$$

$b+11$, $b+9-a$ は有理数であるから

$$b+11=b+9-a=0$$

$\boldsymbol{a=-2}$, $\boldsymbol{b=-11}$

§6　2次関数のグラフ

39

(1)　軸　$\boldsymbol{x=0}$,　頂点　$\boldsymbol{(0,0)}$

(2)　軸　$\boldsymbol{x=0}$,　頂点　$\boldsymbol{(0,-1)}$

(3)　軸　$\boldsymbol{x=-1}$,　頂点　$\boldsymbol{(-1,0)}$

(4)　軸　$\boldsymbol{x=3}$,　頂点　$\boldsymbol{(3,-5)}$

(5)　与式より　$y=(x+1)^2-2$

軸　$\boldsymbol{x=-1}$,　頂点　$\boldsymbol{(-1,-2)}$

← (5)〜(8) は $y=a(x-p)^2+q$ の形に変形する.

(6)　与式より　$y=-(x-2)^2$

軸　$\boldsymbol{x=2}$,　頂点　$\boldsymbol{(2,0)}$

(7)　与式より　$y=2\left(x-\dfrac{1}{4}\right)^2-\dfrac{1}{8}$

軸　$\boldsymbol{x=\dfrac{1}{4}}$,　頂点　$\boldsymbol{\left(\dfrac{1}{4},-\dfrac{1}{8}\right)}$

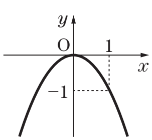
(8)　与式より　$y=-3\left(x+\dfrac{5}{6}\right)^2+\dfrac{37}{12}$

軸　$\boldsymbol{x=-\dfrac{5}{6}}$,　頂点　$\boldsymbol{\left(-\dfrac{5}{6},\dfrac{37}{12}\right)}$

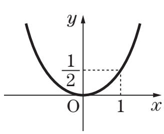
40

← グラフの向き, 頂点の座標, 対称軸, 座標軸との交点を調べる.

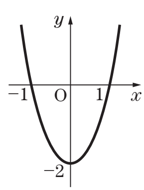
(1)



(2)



(3)



1 個である確率 …… $\dfrac{{}_2\mathrm{C}_1 \cdot {}_3\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_2} = \dfrac{3}{5}$

2 個である確率 …… $\dfrac{{}_2\mathrm{C}_2 \cdot {}_3\mathrm{C}_0}{{}_5\mathrm{C}_2} = \dfrac{1}{10}$

箱 C から球を取り出すとき，白球の数が

0 個である確率 …… $\dfrac{{}_3\mathrm{C}_0 \cdot {}_2\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2} = \dfrac{1}{10}$

1 個である確率 …… $\dfrac{{}_3\mathrm{C}_1 \cdot {}_2\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_2} = \dfrac{3}{5}$

2 個である確率 …… $\dfrac{{}_3\mathrm{C}_2 \cdot {}_2\mathrm{C}_0}{{}_5\mathrm{C}_2} = \dfrac{3}{10}$

以上から，取り出される白球の数が

0 個である確率 …… $\dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{3}{5} + \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{3}{10} + \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{10} = \dfrac{1}{4}$

◀さいころを投げる試行と箱から球を取り出す試行は独立.

1 個である確率 …… $\dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{2}{5} + \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{3}{5} + \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{3}{5} = \dfrac{17}{30}$

2 個である確率 …… $\dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{10} + \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{3}{10} = \dfrac{11}{60}$

したがって，求める期待値は

$$0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{17}{30} + 2 \cdot \frac{11}{60} = \boldsymbol{\frac{14}{15}} \text{（個）}$$

§23　直線図形の基本性質

180

(1)　BD : DC = AB : AC = 15 : 13 から

$$\boldsymbol{x} = 21 \cdot \frac{15}{15+13} \boldsymbol{=} \boldsymbol{\frac{45}{4}},\quad \boldsymbol{y} = 21 \cdot \frac{13}{15+13} \boldsymbol{=} \boldsymbol{\frac{39}{4}}$$

◀$y = 21 - x = \dfrac{39}{4}$ としてもよい.

(2)　BD : DC = AB : AC から

$y : 2 = x : 4$

$x = 2y$　……①

また　$x^2 = (y+2)^2 + 16$　……②

◀△ABC に三平方の定理を用いる.

①を②に代入して

$4y^2 = (y+2)^2 + 16$

$3y^2 - 4y - 20 = 0$

$(3y - 10)(y + 2) = 0$

$y > 0$ から　$\boldsymbol{x = \dfrac{20}{3}}$，$\boldsymbol{y = \dfrac{10}{3}}$