はじめに

数学を学ぶとき，教科書を開くと多くの定理・公式が並んでいます．中には一見しただけでは何を意味しているのか，どのように使うのかわかりにくいものもあります．これは，定理・公式がさまざまな問題に適用することができるよう抽象的に表現されているからです．したがって，それらを理解するために，最初はどんな定理・公式でも具体的な問題で繰り返し使ってみることが大切です．学習はスポーツや楽器の演奏に似たところがあり，正しいフォームを身につけ，それに習熟するには反復練習が必要なのです．

この『カルキュール』は，教科書の学習だけではどうしても不足しがちな計算練習を補充することを目的に編集されました．「カルキュール」とはフランス語で「計算」を意味します．本書には基本的な計算問題が数多く収録されています．この計算にはゲーム感覚で取り組んでみることをお勧めします．また，「習うより慣れろ」という諺（ことわざ）もあります．最初はわからない部分があっても，頑張って計算練習を続けてみてください．きっと，いつのまにか教科書の内容が理解できるようになり，数学のおもしろさもわかってくることでしょう．

みなさんが本書を活用して十分な効果を上げ，さらに勉学にいそしんでくれることを願っています．なお，本書の出版にあたっては駿台文庫の方々に大変お世話になりました．紙面を借りて御礼申し上げます．

阪本　敦子
榎　　明夫
吉川　浩之

本書の特長と利用法

特長

1　いつでも，どこでも，時間がなくても始められる

数学 III・C（ただし，数学 C は「平面上の曲線」「複素数平面」のみ）の分野を 20 セクションに分割し，それぞれ独立した構成としてあります．したがって，どこからでも始めることができます．また，時間に余裕がないときには，問題番号の頭に ∗ を記したものだけに取り組んでも十分効果が得られるよう配慮してあります．

2　レベルに合わせた計算練習ができる

149 の問題を「基本問題」「標準問題」の 2 レベルに分けてあります．

3　計算の経過がわかる

「解答・解説編」では，計算の経過を詳細に，わかりやすく記してあります．

4　答え合わせがすぐできる

答は一覧にして問題巻末に収録してあります．

5　基本事項のまとめがついている

必要な計算法則などは「基本事項のまとめ」として各セクションのはじめに掲載してあります．

利用法

1　高校の教科書と一緒に使用するとき

「基本問題」は教科書の練習問題レベル，「標準問題」はこれよりやや難しいレベルです．自分に必要なレベルの問題に取り組んでください．

2　受験対策の初歩として使用するとき

はじめから「全部やろう」などと考えないで，できそうなところから始めていきましょう．

休まず・あせらず・急がず進めましょう！

目　次

§1　2次曲線の標準形

基本事項のまとめ

▶**放物線**　定点（焦点）と，この点を通らない直線（準線）からの距離が等しい点の軌跡

・$y^2 = 4px\ (p \fallingdotseq 0)$ …… 焦点 $(p, 0)$，準線 $x = -p$，x 軸に関して対称

・$x^2 = 4py\ (p \fallingdotseq 0)$ …… 焦点 $(0, p)$，準線 $y = -p$，y 軸に関して対称

▶**楕円**　2 定点（焦点）からの距離の和が一定である点の軌跡

・$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1\ (a > b > 0)$ …… 焦点 $(\pm\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$，距離の和は $2a$

・$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1\ (b > a > 0)$ …… 焦点 $(0, \pm\sqrt{b^2 - a^2})$，距離の和は $2b$

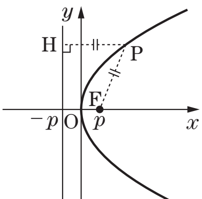
▶**双曲線**　2 定点（焦点）からの距離の差が一定である点の軌跡

・$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1\ (a > 0,\ b > 0)$，焦点 $(\pm\sqrt{a^2 + b^2}, 0)$，距離の差は $2a$

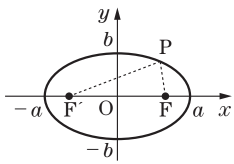
・$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = -1\ (a > 0,\ b > 0)$，焦点 $(0, \pm\sqrt{a^2 + b^2})$，距離の差は $2b$

・漸近線 $\dfrac{x}{a} \pm \dfrac{y}{b} = 0$

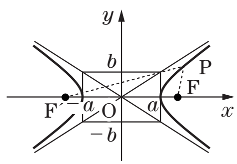
▶**2 次曲線**



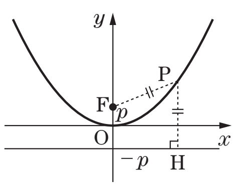
$y^2 = 4px\ (p > 0)$
PF = PH



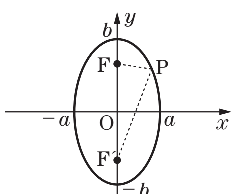
$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1\ (a > b > 0)$
PF + PF´ = $2a$



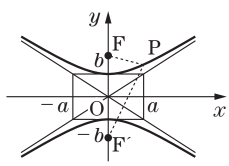
$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1\ (a > 0,\ b > 0)$
|PF − PF´| = $2a$



$x^2 = 4py\ (p > 0)$
PF = PH



$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1\ (b > a > 0)$
PF + PF´ = $2b$



$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = -1\ (a > 0,\ b > 0)$
|PF − PF´| = $2b$

基本問題

1　次の放物線の焦点と準線を求め，その概形をかけ．

*(1)　$y^2 = 4x$　　(2)　$x = -\dfrac{1}{8}y^2$　　*(3)　$y = -\dfrac{1}{2}x^2$

2　次の楕円の焦点を求め，その概形をかけ．

*(1)　$\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$　　(2)　$4x^2 + 9y^2 = 36$　　*(3)　$4x^2 + y^2 = 4$

3　次の双曲線の焦点と漸近線を求め，その概形をかけ．

*(1)　$\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} = 1$　　*(2)　$\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} = -1$　　(3)　$4x^2 - 9y^2 = 36$

標準問題

4　次の条件を満たす点の軌跡を求めよ．

(1)　点 $(0, -4)$ までの距離と直線 $y = 4$ までの距離が等しい点

*(2)　2 点 $(4, 0)$，$(-4, 0)$ からの距離の和が 10 となる点

*(3)　2 点 $(0, 4)$，$(0, -4)$ からの距離の差が 6 となる点

(4)　点 $(2, 0)$ を通り，直線 $x = -2$ に接する円の中心

5　次の条件を満たす曲線の方程式を求めよ．

*(1)　焦点が $(0, 3)$，$(0, -3)$ で短軸の長さが 4 の楕円

(2)　焦点が $(3, 0)$，$(-3, 0)$ で点 $(\sqrt{5}, -2)$ を通る楕円

*(3)　焦点が $(0, \sqrt{5})$，$(0, -\sqrt{5})$ で 2 頂点間の距離が 2 である双曲線

(4)　漸近線が $y = x$，$y = -x$ で点 $(3, 2)$ を通る双曲線

6　中心が $\mathrm{A}(0, 3)$ で半径 1 の円 C に外接し，直線 $y = -2$ に接する円 C' の中心 P の軌跡の方程式を求めよ．

7　点 $\mathrm{A}(3, 0)$ が中心で半径 R の円を C とする．点 $\mathrm{B}(-3, 0)$ を通り，円 C に接する円 C' の中心 P の軌跡の方程式を，次の (1)，(2) について求めよ．

(1)　$R = 8$　　(2)　$R = 4$

§6　いろいろな関数

基本事項のまとめ

▶分数関数のグラフ

・$y=\dfrac{a}{x}$

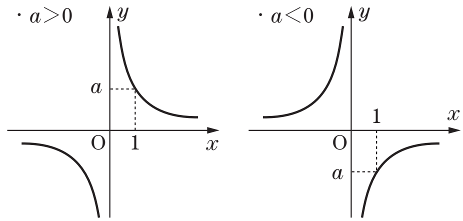
直角双曲線

漸近線は $x=0$，$y=0$

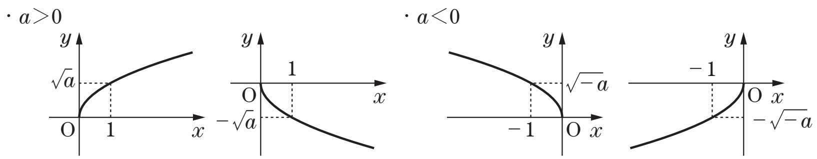
・$y=\dfrac{a}{x-p}+q$ のグラフは

$y=\dfrac{a}{x}$ のグラフを x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動したもので，

漸近線は $x=p$，$y=q$



▶無理関数のグラフ



$y=\sqrt{ax}$　　$y=-\sqrt{ax}$　　$y=\sqrt{ax}$　　$y=-\sqrt{ax}$

▶**逆関数**

・関数 $f(x)$ について，$x_1 \neq x_2$ ならば $f(x_1) \neq f(x_2)$ が成り立つとき，$f(x)$ は 1 対 1 対応であるという．

・1 対 1 対応である関数 $y=f(x)$ は x について解け，$x=f^{-1}(y)$ とかく．

$y=f(x)$ に対して $y=f^{-1}(x)$ を $f(x)$ の逆関数という．

・$y=f(x)$ と $y=f^{-1}(x)$ では定義域と値域が入れかわり，グラフは直線 $y=x$ に関して対称である．

▶**合成関数**

・2 つの関数 $f(x)$，$g(x)$ について，$f(x)$ の値域が $g(x)$ の定義域に含まれるとき，関数 $g(f(x))$ が考えられ，これを $(g\circ f)(x)$ で表し，$f(x)$ と $g(x)$ の合成関数という．　$(g\circ f)(x)$，$(f\circ g)(x)$ は一般に一致しない．

基本問題

41　次の $f(x)$ について，$y=f(x)$ のグラフをかけ．また，$f^{-1}(x)$ を求めよ．

(1)　$f(x)=\dfrac{1}{x+1}$　　*(2)　$f(x)=-\dfrac{2}{x}+3$

*(3)　$f(x)=\sqrt{1-x}$　　(4)　$f(x)=2-\sqrt{x}$

42　次の $f(x)$，$g(x)$ について，合成関数 $(f\circ g)(x)$，$(g\circ f)(x)$ を求めよ．

*(1)　$f(x)=2x+1$，$g(x)=-x+3$　　(2)　$f(x)=x^2$，$g(x)=2^x$

43　$f(x)=2^x-2$，$g(x)=x^2+1\ (x\leqq 0)$ とする．

*(1)　$f^{-1}(x)$，$g^{-1}(x)$ を求めよ．

(2)　$(g^{-1}\circ f)(x)$，$(f^{-1}\circ g^{-1})(x)$ を求めよ．

標準問題

44　次の $f(x)$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ を求めよ．

*(1)　$f(x)=\dfrac{3-2x}{x+1}$　　(2)　$f(x)=2x^2-1\ (x\geqq 0)$

(3)　$f(x)=\log_3(x+2)$

***45**　x の関数 $y=\dfrac{ax+b}{2x+c}$ のグラフが点 $(0,3)$ を通り，$x=-\dfrac{1}{2}$，$y=2$ を漸近線とするとき，a，b，c の値を求め，グラフをかけ．

46　x の関数 $y=\sqrt{|x|+1}$ のグラフをかけ．また，x の方程式 $\sqrt{|x|+1}=a$ の解を a の値で分類して答えよ．

***47**　$f(x)=\dfrac{5x+2}{3x+1}$, $g(x)=\dfrac{x-2}{ax+b}$ (a, b は定数) に対して, つねに $(f\circ g)(x)=x$ が成り立つとき，a，b の値を求めよ．

48　$f(x)=2x+a$，$g(x)=x^2+3ax$ とする．このとき $(f\circ g)(x)$，$(g\circ f)(x)$ を求めよ．また，x の任意の実数値に対して $(f\circ g)(x)\leqq(g\circ f)(x)$ がつねに成り立つための a のとり得る値の範囲を求めよ．

49　$f(x)=x+2$，$g(x)=x^2$ のとき，$(f\circ h)(x)=g(x)$ となるような x の関数 $h(x)$ を求めよ．

§16　不定積分

基本事項のまとめ

▶いろいろな関数の不定積分（C を積分定数とする）

・$\displaystyle\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+C\ \ (\alpha \fallingdotseq -1),\ \int \frac{1}{x}dx = \log|x|+C$

・$\displaystyle\int \cos x dx = \sin x + C,\ \int \sin x dx = -\cos x + C$

$\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + C,\ \int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\frac{1}{\tan x}+C$

・$\displaystyle\int e^x dx = e^x + C,\ \int a^x dx = \frac{a^x}{\log a}+C\quad (a>0,\ a \fallingdotseq 1)$

▶置換積分法

・$x=g(t)$ とおくとき　$\displaystyle\int f(x)dx = \int f(g(t))g'(t)dt$

・$t=g(x)$ とおくとき　$\displaystyle\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(t)dt$

・$\displaystyle\int \{f(x)\}^\alpha f'(x)dx = \frac{1}{\alpha+1}\{f(x)\}^{\alpha+1}+C\quad (\alpha \fallingdotseq -1)$

・$\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \log|f(x)|+C$

▶部分積分法

・$\displaystyle\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$

基本問題

115　次の不定積分を求めよ．

*(1) $\displaystyle\int x^2(x^3+1)dx$　*(2) $\displaystyle\int (2t+1)^5 dt$　(3) $\displaystyle\int u\sqrt{u}du$

(4) $\displaystyle\int \frac{dx}{(2x+1)^2}$　(5) $\displaystyle\int \frac{(\sqrt[3]{x}+1)^3}{x}dx$　*(6) $\displaystyle\int \frac{x^2-2x-1}{x+1}dx$

(7) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}$　*(8) $\displaystyle\int \frac{1}{x(x-1)}dx$

116 次の不定積分を求めよ.

*(1) $\displaystyle\int(\cos x-2\sin x)dx$　(2) $\displaystyle\int(1+\tan x)\cos x dx$

*(3) $\displaystyle\int\frac{1+\cos^3 x}{\cos^2 x}dx$　(4) $\displaystyle\int\frac{\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx$

*(5) $\displaystyle\int(2e^x+2^x)dx$　(6) $\displaystyle\int 3^{4x+5}dx$

117 次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int x\sqrt{1-x}dx$　*(2) $\displaystyle\int\tan x dx$　(3) $\displaystyle\int(e^x-1)^3 e^x dx$

(4) $\displaystyle\int x\sin 3x dx$　*(5) $\displaystyle\int\log x dx$　(6) $\displaystyle\int x^2 e^{2x}dx$

標準問題

118 次の不定積分を求めよ.

*(1) $\displaystyle\int\frac{2x^2+1}{2x^2-x-1}dx$　*(2) $\displaystyle\int\frac{3x+5}{(x+1)(x+2)^2}dx$

(3) $\displaystyle\int\sin 2x\cos 2x\cos 4x dx$　(4) $\displaystyle\int\sin 3x\cos 2x dx$

*(5) $\displaystyle\int\sin^2 2x dx$　(6) $\displaystyle\int\sin^3 x dx$

(7) $\displaystyle\int\cos^4 x dx$　(8) $\displaystyle\int\frac{2^{3x}+1}{2^x+1}dx$

119 次の不定積分を求めよ.

*(1) $\displaystyle\int\frac{x^3}{\sqrt{(x^2+1)^3}}dx$　*(2) $\displaystyle\int\frac{dx}{\cos x}$

*(3) $\displaystyle\int\sin^3 x\cos^2 x dx$　(4) $\displaystyle\int\frac{dx}{\cos^4 x}$

(5) $\displaystyle\int e^{\sqrt{x}}dx$　(6) $\displaystyle\int\sqrt{1+e^x}dx$

(7) $\displaystyle\int\log(x+\sqrt{x^2+1})dx$　*(8) $\displaystyle\int e^x\cos x dx$

§1　2 次曲線の標準形

1

(1)　与式より　$y^2 = 4 \cdot 1 \cdot x$　　$\Leftarrow p = 1$

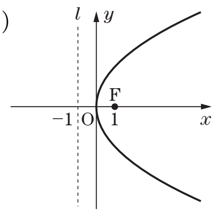
焦点 F$\boldsymbol{(1, 0)}$，準線 l : $\boldsymbol{x = -1}$

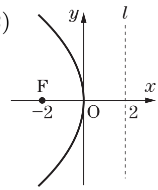
(2)　与式より　$y^2 = 4 \cdot (-2)x$　　$\Leftarrow p = -2$

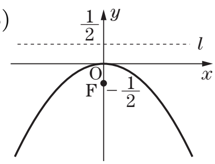
焦点 F$\boldsymbol{(-2, 0)}$，準線 l : $\boldsymbol{x = 2}$

(3)　与式より　$x^2 = 4 \cdot \left(-\dfrac{1}{2}\right) y$　　$\Leftarrow p = -\dfrac{1}{2}$

焦点 F$\boldsymbol{\left(0, -\dfrac{1}{2}\right)}$，準線 l : $\boldsymbol{y = \dfrac{1}{2}}$

(1)


(2)


(3)


2

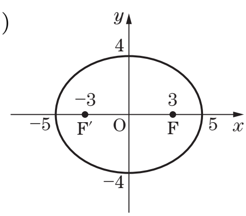
(1)　$\sqrt{25 - 16} = 3$ より　焦点 F$\boldsymbol{(3, 0)}$，F$'\boldsymbol{(-3, 0)}$　　$\Leftarrow a^2 = 25$, $b^2 = 16$

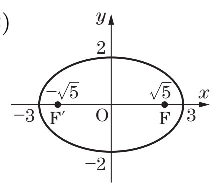
(2)　与式より　$\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$　　$\Leftarrow a^2 = 9$, $b^2 = 4$

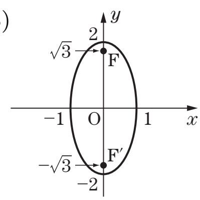
$\sqrt{9 - 4} = \sqrt{5}$ より　焦点 F$\boldsymbol{(\sqrt{5}, 0)}$，F$'\boldsymbol{(-\sqrt{5}, 0)}$

(3)　与式より　$\dfrac{x^2}{1} + \dfrac{y^2}{4} = 1$　　$\Leftarrow a^2 = 1$, $b^2 = 4$

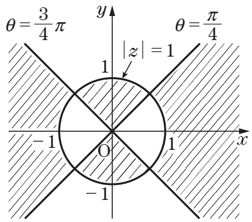
$\sqrt{4 - 1} = \sqrt{3}$ より　焦点 F$\boldsymbol{(0, \sqrt{3})}$，F$'\boldsymbol{(0, -\sqrt{3})}$

(1)


(2)


(3)


図の斜線部分（境界線は含まない）



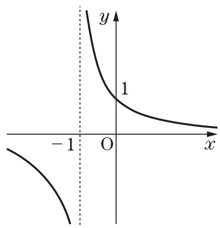
§6　いろいろな関数

41

(1)　$y=f(x)$ のグラフは　$y=\dfrac{1}{x}$

のグラフを x 軸方向に -1

だけ平行移動したもの.



⬅漸近線が $x=-1$, $y=0$ の直角双曲線.

$y=\dfrac{1}{x+1}$ より　$x=\dfrac{1}{y}-1$

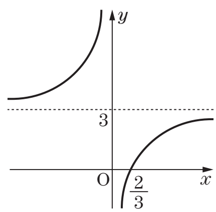
$f^{-1}(x)=\boldsymbol{\dfrac{1}{x}-1}$

⬅x と y を入れ替える.

(2)　$y=f(x)$ のグラフは　$y=-\dfrac{2}{x}$

のグラフを y 軸方向に 3 だけ

平行移動したもの.



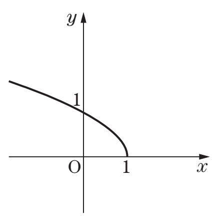
⬅漸近線が $x=0$, $y=3$ の直角双曲線.

$y=-\dfrac{2}{x}+3$ より　$x=-\dfrac{2}{y-3}$

$f^{-1}(x)=\boldsymbol{-\dfrac{2}{x-3}}$

(3)　$f(x)$ のグラフは　$y=\sqrt{-x}$

のグラフを x 軸方向に 1 だけ平行移動したもの.

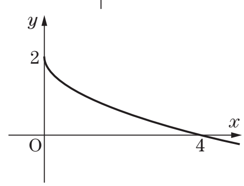


$y=\sqrt{1-x}$ より　$x=-y^2+1$, $y \geqq 0$

$f^{-1}(x)=\boldsymbol{-x^2+1}$, $\boldsymbol{x \geqq 0}$

(4)　$f(x)$ のグラフは　$y=-\sqrt{x}$

のグラフを y 軸方向に 2 だけ平行移動したもの.



$y=2-\sqrt{x}$ より　$x=(y-2)^2$, $y \leqq 2$

$f^{-1}(x)=\boldsymbol{(x-2)^2}$, $\boldsymbol{x \leqq 2}$

(3) $\dfrac{dx}{dt}=\pi(\cos\pi t-\sin\pi t)$, $\dfrac{dy}{dt}=2\pi(\cos\pi t+\sin\pi t)$ より

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=\pi^2(\cos\pi t-\sin\pi t)^2+4\pi^2(\cos\pi t+\sin\pi t)^2$$
$$=\pi^2(5+3\sin 2\pi t)$$

$$|v|=\pi\sqrt{5+3\sin 2\pi t}$$

$|v|$ の最大値は　$\boldsymbol{2\sqrt{2}\pi}$

このとき，$\sin 2\pi t=1$ より

$$t=\boldsymbol{n+\frac{1}{4}}\ \text{（}\boldsymbol{n}\text{ は整数）}$$

(4) $\dfrac{dx}{dt}=1-\cos t$, $\dfrac{dy}{dt}=\sin t$ より

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=(1-\cos t)^2+\sin^2 t=2-2\cos t$$

$$|v|=\sqrt{2(1-\cos t)}$$

$|v|$ の最大値は　$\sqrt{4}=\boldsymbol{2}$

このとき，$\cos t=-1$ より

$$t=\boldsymbol{2n\pi+\pi}\ \text{（}\boldsymbol{n}\text{ は整数）}$$

§16　不定積分

115

C を積分定数とする．

(1) $(\text{与式})=\displaystyle\int(x^5+x^2)dx=\boldsymbol{\frac{1}{6}x^6+\frac{1}{3}x^3+C}$

(2) $(\text{与式})=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{6}(2t+1)^6+C=\boldsymbol{\dfrac{1}{12}(2t+1)^6+C}$

⬅ $\displaystyle\int(ax+b)^n dx=\frac{1}{a(n+1)}(ax+b)^{n+1}+C$

(3) $(\text{与式})=\displaystyle\int u^{\frac{3}{2}}du=\boldsymbol{\frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}}+C}$

(4) $(\text{与式})=\displaystyle\int(2x+1)^{-2}dx=-\frac{1}{2}(2x+1)^{-1}+C$

$$=\boldsymbol{-\frac{1}{2(2x+1)}+C}$$

(5) $(\text{与式})=\displaystyle\int(1+3x^{-\frac{1}{3}}+3x^{-\frac{2}{3}}+x^{-1})dx$

⬅ $(\sqrt[3]{x}+1)^3=x+3x^{\frac{2}{3}}+3x^{\frac{1}{3}}+1$

$$=\boldsymbol{x+\frac{9}{2}\sqrt[3]{x^2}+9\sqrt[3]{x}+\log|x|+C}$$