はじめに

このBASIC 121(数Ⅲ・C)は，入試に向けた基本問題集です．ここで「基本」というのは，たんに「教科書ではじめに学ぶ事柄」というだけではなく，入試問題に取り組むために必要な四つのもの——言葉や記号の定義・公式とその証明・基本計算の技術・問題の基本的な解法——が互いに関係しあう，有機的な一つのまとまりを意味しています．ここで，この問題集の主要な特徴を述べておきます．

1．教科書にある定義や公式で必要なものはできるだけのせている

例題を解くのに必要な定義や公式をできるだけ例題と同じページに入れました．知識と計算と解法が有機的につながることをめざしました．

2．各分野のはじめに必要な計算問題を配置している

はじめに計算問題を解いてみることで，基本的な知識が頭に入っているかを確認します．計算力はすべての学習の基礎です．解法を考えるうえで欠かすことのできない道具になります．計算に未熟さを感じたら，教科書等に戻って，いくつか計算の例題をやり直してみるとよいでしょう．

3．問題に先入観なしに取り組むために，問題・解答・公式・説明という順番にしている

問題に取り組むときにまず大切なことは，「問題が解けるかどうか」，「問題を解くのに必要な知識を正確に覚えているかどうか」を確認することです．ヒントが解答の前にあると，そこから読んでしまいがちで，自分がどこまでわかっていて，どこからわからないのかを確認できなくなる恐れがあります．そのため，このような順番にしてあります．

4．最小限の問題数で各分野の全体が見渡せるように問題を厳選している

各分野で，「何をしているのか」，「何をしたいのか」を頭の中で整理できることが重要です．各分野の基本計算と典型的な方法に関わるものだけに問題を限定しました．これにより，分野ごとに，自分がわからない部分がどこなのかが明確になると思います．

5．問題を考えるときの「・・・のときはこうする(・・・ならば・・・である)」という考え方の流れをシェーマ(図式)とよんで各問題に配置している

問題を解くときに私たちは推論をしています．推論の典型的な例は，「pならばqであること」と「pであること」から，qを導くことです．(たとえば，$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \perp \overrightarrow{\mathrm{CD}}$という条件より，「$\vec{a} \perp \vec{b}$ならば$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$」という公式を用いて，$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CD}} = 0$を主張します．)知識を「$p$ならば$q$」の形で頭に入れておくことは大切なことです．もちろん，いつも同じ方法で解けるわけではないのですが，はじめに思いつかないといけない考え方，考え方の典型を示そうとしました．問題を解いたら，どのような推論が解法のポイントであるかを自分なりの言葉で表現してみるのもよいでしょう．

6．計算，公式の適用について，より発展的な問題を TRIAL としてのせ，教科書にあることから論理的に思考を発展させる道筋を与えている

基本を身につけたら，応用問題を解くのがいい，と言いますが，まずは計算や公式の適用の仕方を論理的に発展させられることが，理解を深めるうえで大切なことです．TRIAL にはそのような問題をのせてあります．余裕ができたらやってみてください．

使用上の注意事項ですが，例題が自力で解けず，答えを読んだときには，必ず復習問題を続けて解いてみてください．例題の解答を真似して答案を書くだけでも，はじめのうちはとても役に立ち，「体で覚える」ことになり，理解が深まります．自分で解きすすむにつれて，(とくに各分野の後半で)難しいと感じる問題もあるかもしれません．そのときには難しいという気持ちをいやがらず，それを新たな展開へのきっかけと考え，すぐに答えに飛びつかず，あせらないでもう一度考えてみてください．わからないことに出会ったら，何が問題なのかを自分で考え，わかるように努力してはじめて前進することができるものです．答えを読んでわかった気になるよりは，わからないということを自覚して,「あとでまたやってみよう」といった軽い気持ちで，とりあえず先に進むのもいいかもしれません．「なぜこうなるのだろう」という疑問を大切にして問題に取りくんでください．

この問題集の例題を出発点にして，より基本的なことは教科書等にもどり，より発展的なことは TRIAL，さらには実践的な入試問題を解くことで，より深い理解を求めて先に進んでほしいと思います．この問題集を自分のベース(BASE：基盤)として，さらなる地点をめざしてその先へ進んでください．

この問題集ができるまで多くの方々のお世話になりました．編集部の松永正則さん，大坂美緒さん，改訂に際して，加藤達也さん，林拓実さん，前橋桂介さんに御礼申し上げます．また，小寺智也さん，小沢英雄さん，齋藤大成さんには貴重なご助言を頂き，感謝の念にたえません．そして，議論に付き合ってくださったたくさんの方々にも感謝します．

桐山宣雄

本書の特長と利用法

実際の使い方としては

1. まず 例題 を解いてみてください．
2. それから 解答 を確認し，自分の今いる地点(実力)を確認してください．(問題は解けたか．言葉の意味は知っていたか，公式は覚えていたか，公式は使えたか，計算はできたか，などなど．)
3. 例題が解けず，解答を読んだものについては，間をあけず 復習問題 を紙の上で解いてみてください．（そのため多くの復習問題は例題と同程度の類題にとどめてあります.）真似て解いてみることも基礎を定着させるにはとても大切なことです．
4. 疑問がわいたら，計算については傍注，理論的な事については Assist を見ること．公式は基礎として重要な定理はおおよそ載せてあります．必要に応じて，概念の約束である定義も傍注や公式の中にちりばめておきました．（より詳しい説明が知りたくなったら，面倒がらずに教科書等に戻ってください.）
5. シェーマ は推論の仕方を思い出しやすいように，みじかい言葉(こういう時はこう考えるという図式)で示したものです．各自，自分なりの言葉でやり方を整理するのもいいでしょう．

数学においては，理論のもつ意味に注意しながら，**論理的思考力**と**思考の柔軟性**を養うことが大切です．そのために，この問題集で基礎を確認し，そこから，さらなる実戦的な問題に挑戦し，つねに未知なる世界をめざしてほしいと思います．その途上でくりかえし立ち返る土台として，この問題集を使っていただければさいわいです．

目次

§５. 微分

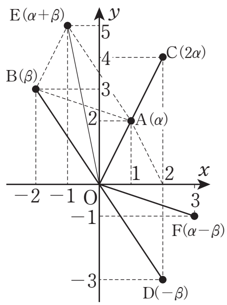
§６. 積分

例題 001 複素数平面における和・差と実数倍

$\alpha=1+2i$, $\beta=-2+3i$, A(α), B(β), c は実数の定数とする.

(1) C(2α), D($-\beta$), E($\alpha+\beta$), F($\alpha-\beta$) を表す点をそれぞれ図示せよ.

(2) $\gamma=c-3i$ とする. 3 点 0, α, γ が一直線上にあるとき, c の値を求めよ.



解 (1) 点 A(α) は点 (1, 2) に, 点 B(β) は点 (−2, 3) に対応する.
$2\alpha=2+4i$, $-\beta=2-3i$ より, 点 C(2α), 点 D($-\beta$) は
それぞれ点 (2, 4), 点 (2, −3) に対応する.
$\alpha+\beta=-1+5i$, $\alpha-\beta=3-i$ より, 点 E($\alpha+\beta$), F($\alpha-\beta$) は
それぞれ点 (−1, 5), 点 (3, −1) に対応する.

(2) 3 点 0, α, γ が一直線上にあるとき, $\gamma=t\alpha$ (t は実数) と表せ

$$c-3i=t(1+2i) \quad \therefore\ c-3i=t+2ti$$

t, c は実数なので　$c=t$ かつ $-3=2t$　$\therefore\ t=-\dfrac{3}{2}$, $\boldsymbol{c=-\dfrac{3}{2}}$

Assist

(複素数平面)　複素数 $\alpha=a+bi$ を座標平面上の点 (a, b) で表したとき, この平面を複素数平面または複素平面という. 複素数平面上では, x 軸を実軸, y 軸を虚軸という. 実軸上の点は実数を表し, 虚軸上の原点 O と異なる点は純虚数を表す. 複素数 α を表す点 A を A(α) と書く.

(和・差・実数倍の定義)　$z_1=a+bi$, $z_2=c+di$ (a, b, c, d は実数) とするとき

$$z_1+z_2=(a+c)+(b+d)i,\quad z_2-z_1=(c-a)+(d-b)i,\quad tz_1=ta+tbi \quad (t\text{ は実数})$$

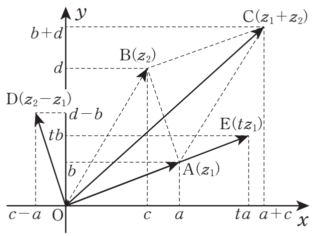
(ベクトルの図示との関係)

(i) $\beta=-2+3i$ より, 点 E($\alpha+\beta$) は点 A(α) を実軸方向に −2, 虚軸方向に 3 だけ平行移動した点であり, 点 E は OA, OB を 2 辺とする平行四辺形の残りの頂点である. $\alpha-\beta=\alpha+(-\beta)$ であるから, 点 F($\alpha-\beta$) は OA, OD を 2 辺とする平行四辺形の残りの頂点である. ベクトルの図示と同様に考えることができ　$\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OF}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$

(ii) A(z_1), B(z_2), C(z_1+z_2), D(z_2-z_1), E(tz_1) とするとき, xy 座標で表すと A(a, b), B(c, d), C($a+c, b+d$), D($c-a, d-b$), E(ta, tb) であり, ベクトルで表すと

$\overrightarrow{OC}=(a+c, b+d)=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OE}=(ta, tb)=t\overrightarrow{OA}$,

$\overrightarrow{OD}=(c-a, d-b)=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AB}$



(3 点が一直線上)

「3 点 0, α, β が一直線上にある」

⇔「$\beta=k\alpha$ となる実数 k がある」

「3 点 α, β, γ が一直線上にある」⇔「$\gamma-\alpha=k(\beta-\alpha)$ となる実数 k がある」

シェーマ

和・差・実数倍 ⟫ ベクトルの図示のように考える

復習 001　$\alpha=-3+i$, $\beta=2-4i$, A(α), B(β), c は実数の定数とする.

(1) C$\left(\dfrac{5}{3}\alpha\right)$, D($-2\alpha$), E($\alpha+\beta$), F($\alpha-\beta$), G($-2\alpha+\beta$) を表す点をそれぞれ図示せよ.

(2) $\gamma=2-ci$ とする. 3 点 0, α, γ が一直線上にあるとき, c の値を求めよ.

例題 002 共役複素数

(1) 実数係数の 4 次方程式 $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$ が虚数 α を解にもつとき，その共役複素数 $\overline{\alpha}$ も解であることを示せ．

(2) 複素数 z とそれに共役な複素数 $\overline{z}$ が $iz+2\overline{z}=3$ をみたすとき，z の値を求めよ．

(3) $z\overline{z}=1$ のとき $z+\dfrac{1}{z}$ が実数であることを示せ．

解 (1) $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$ が α を解にもつとき $a\alpha^4+b\alpha^3+c\alpha^2+d\alpha+e=0$

よって $\overline{a\alpha^4+b\alpha^3+c\alpha^2+d\alpha+e}=\overline{0}$ ∴ $\overline{a\alpha^4}+\overline{b\alpha^3}+\overline{c\alpha^2}+\overline{d\alpha}+\overline{e}=\overline{0}$

∴ $\overline{a}\,\overline{\alpha^4}+\overline{b}\,\overline{\alpha^3}+\overline{c}\,\overline{\alpha^2}+\overline{d}\,\overline{\alpha}+\overline{e}=\overline{0}$ ∴ $\overline{a}(\overline{\alpha})^4+\overline{b}(\overline{\alpha})^3+\overline{c}(\overline{\alpha})^2+\overline{d}\,\overline{\alpha}+\overline{e}=\overline{0}$

a，b，c，d，e，0 は実数なので $a(\overline{\alpha})^4+b(\overline{\alpha})^3+c(\overline{\alpha})^2+d\overline{\alpha}+e=0$

よって，$\overline{\alpha}$ も $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$ の解である． 終

(2) $z=x+yi$（x, y は実数）とおくと，与式は

$$i(x+yi)+2(x-yi)=3 \quad \therefore\ 2x-y-3+(x-2y)i=0$$

$2x-y-3$，$x-2y$ は実数なので

$$2x-y-3=0 \text{ かつ } x-2y=0 \quad \therefore\ x=2,\ y=1 \quad \therefore\ \boldsymbol{z=2+i}$$

別解 $iz+2\overline{z}=3$…①より $(\overline{iz+2\overline{z}})=\overline{3}$ ∴ $\overline{i}\,\overline{z}+\overline{2}\,\overline{\overline{z}}=\overline{3}$ ∴ $-i\overline{z}+2z=3$…②

$i\times$①$+2\times$②より $3z=6+3i$ ∴ $\boldsymbol{z=2+i}$

(3) $z\overline{z}=1$ より $\overline{z}=\dfrac{1}{z}$ であるから $\overline{\left(z+\dfrac{1}{z}\right)}=\overline{z}+\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)}=\overline{z}+\dfrac{1}{\overline{z}}=\dfrac{1}{z}+z=z+\dfrac{1}{z}$

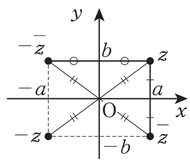
よって，$z+\dfrac{1}{z}$ は実数． 終

$z+\dfrac{1}{z}$ が実数⇔$\overline{z+\dfrac{1}{z}}=z+\dfrac{1}{z}$

Assist （共役複素数） 複素数 $\alpha=a+bi$ に対し $\overline{\alpha}=a-bi$ を α と共役な複素数という．

（共役複素数の性質） $\overline{\alpha+\beta}=\overline{\alpha}+\overline{\beta}$ $\overline{\alpha-\beta}=\overline{\alpha}-\overline{\beta}$

$\overline{\alpha\beta}=\overline{\alpha}\,\overline{\beta}$ $\overline{\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)}=\dfrac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}}$ $\overline{\overline{\alpha}}=\alpha$



《実数条件・純虚数条件》 α が実数 ⇔ $\alpha=\overline{\alpha}$， α が純虚数または 0 ⇔ $\overline{\alpha}=-\alpha$

シェーマ

複素数の等式 $A=B$ ≫ 両辺の共役をとり $\overline{A}=\overline{B}$

復習 002

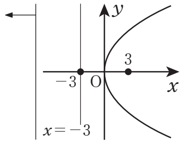
(1) 複素数 z とそれに共役な複素数 $\overline{z}$ が，$3z-i\overline{z}=4$ をみたすとき，z の値を求めよ．

(2) $\dfrac{\alpha}{1+\alpha^2}$ が実数であるとき，実数でない複素数 α に対して，$\alpha\overline{\alpha}$ を求めよ．

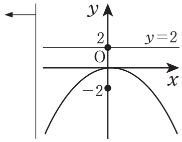
例題 017 放物線の方程式の標準形

(1) 定点 $(3,0)$ と直線 $x=-3$ までの距離が等しい点Pの軌跡を求めよ.
(2) 焦点の座標が $(0,-2)$, 準線の方程式が $y=2$ である放物線の方程式を求めよ.
(3) 放物線 $y^2=2x$ の焦点と準線を求め, 概形をかけ.

解 (1) 条件より, 点Pの軌跡は放物線である. 焦点が $(3,0)$, 準線が $x=-3$ であるから, その方程式は $y^2=4px$ $(p\neq0)$ と表せ, $p=3$ である.
よって, 点Pの軌跡は **放物線 $y^2=12x$**

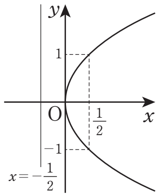


(2) 焦点が $(0,-2)$, 準線が $y=2$ であるから, その方程式は $x^2=4py$ $(p\neq0)$ と表せ, $p=-2$ である.
よって, 求める方程式は **$x^2=-8y$**



(3) $y^2=2x$ より $y^2=4\cdot\frac{1}{2}x$ であるから

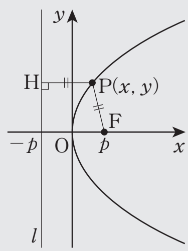
焦点は $\left(\frac{1}{2},0\right)$, 準線は $x=-\frac{1}{2}$



Assist (放物線の定義)

平面上で, 定点Fと, Fを通らない定直線 l からの距離が等しい点Pの軌跡を放物線といい, 点Fをその焦点, 直線 l を準線という.

《放物線の方程式》
点 $\mathbf{F}(p,0)$ を焦点とし, 直線 $x=-p$ を準線とする放物線の方程式は **$y^2=4px$**



(注) (y 軸を軸とする放物線)
点 $F(0,p)$ を焦点とし, 直線 $y=-p$ を準線とする
放物線の方程式は $x^2=4py$

シェーマ

$y^2=4px$ ⟫ **原点が頂点, 焦点が $(p,0)$ 準線が $x=-p$ の放物線**

復習 017

(1) 定点 $(-2,0)$ と直線 $x=2$ までの距離が等しい点の軌跡の方程式を求めよ.
(2) 焦点の座標が $(0,5)$, 準線の方程式が $y=-5$ である放物線の方程式を求めよ.
(3) 放物線 $x^2=6y$ の焦点と準線を求め, 概形をかけ.

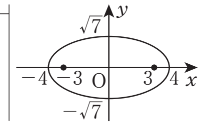
例題 018　楕円の方程式の標準形

(1)　2 定点 (3, 0)，(−3, 0) からの距離の和が 8 である点 P の軌跡を求めよ．

(2)　短軸の長さが 6, 焦点の座標が (0, 5), (0, −5) である楕円の方程式を求めよ．

(3)　$\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{9}=1$ で表される楕円の焦点を求め，概形をかけ．

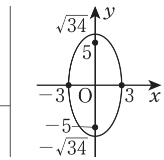
解 (1)　条件より，点 P の軌跡は楕円である．焦点が (±3, 0), 距離の和が 8 であることから，その方程式は $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ と表せ



$$2a=8 \quad かつ \quad a^2-b^2=3^2 \quad \therefore\ a=4,\ b^2=7$$

よって，点 P の軌跡は　楕円 $\boldsymbol{\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{7}=1}$

(2)　焦点が (0, ±5)，短軸の長さが 6 であるから，楕円の方程式は



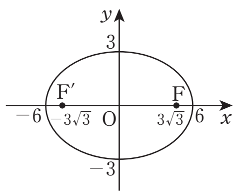
$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(b>a>0)$ と表せ

$$2a=6 \quad かつ \quad 5^2=b^2-a^2 \quad \therefore\ a=3,\ b^2=34$$

よって，求める方程式は　$\boldsymbol{\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{34}=1}$

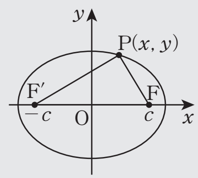
(3)　楕円の方程式より，焦点は $(\pm c,\ 0)$ $(c>0)$ と表せ

$c^2=36-9=27$　$\therefore\ c=3\sqrt{3}$　　焦点は　$\boldsymbol{(\pm 3\sqrt{3},\ 0)}$



Assist　（楕円の定義）平面上で，2 定点 F，F′ からの距離の和が一定である点 P の軌跡を楕円といい，2 点 F，F′ を楕円の焦点という．直線 FF′ のうち楕円が切り取る線分を長軸，長軸の垂直二等分線のうち楕円が切り取る線分を短軸という．また，長軸と短軸の交点を中心という．

《楕円の方程式》　焦点が $(\pm c, 0)$，2 焦点までの距離の和が $2a$ である楕円の方程式は　$\boldsymbol{\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1}$　（ただし，$c^2=a^2-b^2$）



（注）　焦点 $(0, \pm c)$，距離の和 $2b$ のときは　$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$　$(c^2=b^2-a^2)$

シェーマ

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$　$(a>b>0)$　≫　**中心が原点，焦点が $(\pm\sqrt{a^2-b^2},\ 0)$，長軸の長さ $=2a$ の楕円**

復習 | 018

(1)　2 定点 (0, 4)，(0, −4) からの距離の和が 12 である点 P の軌跡の方程式を求めよ．

(2)　長軸の長さが 8，焦点の座標が (3, 0)，(−3, 0) である楕円の方程式を求めよ．

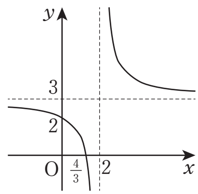
(3)　$25x^2+24y^2=600$ で表される楕円の焦点と，長軸の長さを求め，概形をかけ．

例題 037 分数関数のグラフ，分数方程式・不等式

(1) 分数関数 $y=\dfrac{3x-4}{x-2}$ のグラフをかけ.

(2) 方程式 $\dfrac{3x-4}{x-2}=\dfrac{5}{3}x$ を解け.　　(3) 不等式 $\dfrac{3x-4}{x-2}<\dfrac{5}{3}x$ を解け.

解 (1) $y=3+\dfrac{2}{x-2}$　　← $3x-4=(x-2)\cdot3+2$ より.



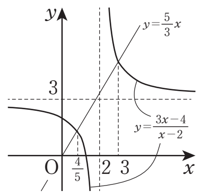
よって，$y=\dfrac{3x-4}{x-2}$ のグラフは，$y=\dfrac{2}{x}$ のグラフを x 軸方向に 2，y 軸方向に 3 だけ平行移動したものである.

(2) 方程式 $\dfrac{3x-4}{x-2}=\dfrac{5}{3}x\cdots$①より

$3(3x-4)=5x(x-2)$　∴ $5x^2-19x+12=0$

∴ $(x-3)(5x-4)=0$　∴ $\boldsymbol{x=\dfrac{4}{5},\ 3}$　　← $x\neq2$ をみたす.

(3) 不等式 $\dfrac{3x-4}{x-2}<\dfrac{5}{3}x$ の解は，$y=\dfrac{3x-4}{x-2}$ のグラフが直線 $y=\dfrac{5}{3}x$ より下側にある x の値の範囲である．また，①の実数解は，$y=\dfrac{3x-4}{x-2}$ のグラフと直線 $y=\dfrac{5}{3}x$ の共有点の x 座標である.

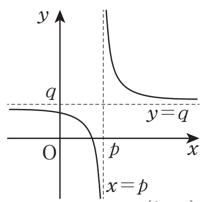


よって，グラフと(2)より　$\boldsymbol{\dfrac{4}{5}<x<2,\ 3<x}$

Assist

1° （関数の平行移動）　関数 $y=f(x-p)+q$ のグラフは，$y=f(x)$ のグラフを x 軸方向に p, y 軸方向に q だけ平行移動した曲線である.

2° （分数関数のグラフ）　分数関数 $y=\dfrac{k}{x-p}+q$ のグラフは, $y=\dfrac{k}{x}$ のグラフを x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動した直角双曲線で，漸近線は $x=p$，$y=q$ である．定義域は $x\neq p$，値域は $y\neq q$.



$(k>0)$

3° (3)は次の様に解いてもよい．$x\neq2$ より，両辺に $3(x-2)^2(>0)$ をかけて

$3(3x-4)(x-2)<5x(x-2)^2$　∴ $(x-2)(5x^2-19x+12)>0$

∴ $(x-2)(5x-4)(x-3)>0$　∴ $\dfrac{4}{5}<x<2,\ 3<x$

シェーマ

$y=\dfrac{cx+d}{ax+b}$ **のグラフ** ≫ $y=\dfrac{k}{x-p}+q$ **の形に直し**，$y=\dfrac{k}{x}$ **を平行移動**

復習 037　(1) 分数関数 $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$ のグラフをかけ.

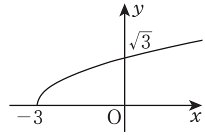
(2) 方程式 $\dfrac{2x-1}{x+1}=x-1$ を解け.　　(3) 不等式 $\dfrac{2x-1}{x+1}\leqq x-1$ を解け.

例題 038 無理関数のグラフ，無理方程式・不等式

(1)　無理関数 $y=\sqrt{x+3}$ のグラフをかけ．

(2)　方程式 $\sqrt{x+3}=x-1$ を解け．　　(3)　不等式 $\sqrt{x+3}\geqq x-1$ を解け．

解　(1)　$y=\sqrt{x+3}$ のグラフは，$y=\sqrt{x}$ のグラフを x 軸方向に -3 だけ平行移動したものである．

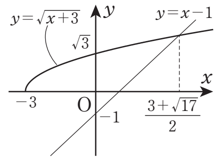


(2)　方程式 $\sqrt{x+3}=x-1$ の解は，無理関数 $y=\sqrt{x+3}$ のグラフと直線 $y=x-1$ の共有点の x 座標である．

$\sqrt{x+3}=x-1$ より　$x+3=(x-1)^2$　∴　$x^2-3x-2=0$　∴　$x=\dfrac{3\pm\sqrt{17}}{2}$

グラフより，$x\geqq 1$ であるから　$\boldsymbol{x=\dfrac{3+\sqrt{17}}{2}}$

(3)　不等式 $\sqrt{x+3}\geqq x-1$ の解は，無理関数 $y=\sqrt{x+3}$ のグラフが直線 $y=x-1$ より上側にある（共有点を含む）x の値の範囲である．グラフより　$\boldsymbol{-3\leqq x\leqq\dfrac{3+\sqrt{17}}{2}}$

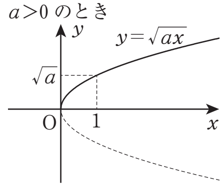


Assist

1°　（$y=\sqrt{ax}$ のグラフ）

$y=\sqrt{ax}\Leftrightarrow y^2=ax$ かつ $y\geqq 0\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{a}y^2$ かつ $y\geqq 0$

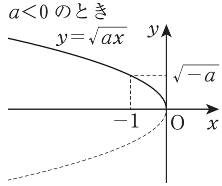
$a>0$ のとき



2°　（無理関数のグラフ）

無理関数 $y=\sqrt{a(x-p)}+q$ のグラフは，$y=\sqrt{ax}$ のグラフを x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動したものである．

$a<0$ のとき



3°　(2)，(3)は次の様に解いてもよい．

(2)　与式をみたすには $x+3\geqq 0$ かつ $x-1\geqq 0$（∴ $x\geqq 1$）が必要である．このもとで，与式より　$x+3=(x-1)^2$　∴　$x^2-3x-2=0$

$x\geqq 1$ より　$x=\dfrac{3+\sqrt{17}}{2}$

(3)　与式をみたすには $x+3\geqq 0$（∴ $x\geqq -3$）が必要である．このもとで，与式より　$x-1<0$ または $\begin{cases} x-1\geqq 0 \\ x+3\geqq (x-1)^2 \end{cases}$　∴　$x<1$ または $\begin{cases} x\geqq 1 \\ \dfrac{3-\sqrt{17}}{2}\leqq x\leqq\dfrac{3+\sqrt{17}}{2} \end{cases}$

∴　$x\leqq\dfrac{3+\sqrt{17}}{2}$　　$x\geqq -3$ より　$-3\leqq x\leqq\dfrac{3+\sqrt{17}}{2}$

シェーマ

$y=\sqrt{ax+b}+c$ のグラフ ≫ **$y-c=\sqrt{a(x-p)}$ と変形し，$y=\sqrt{ax}$ を 平行移動**

復習 038　(1)　無理関数 $y=\sqrt{-\dfrac{1}{2}x+3}$ のグラフをかけ．

(2)　(i)　方程式 $\sqrt{x+2}=2x-2$ を解け．　　(ii)　不等式 $\sqrt{x+2}<2x-2$ を解け．

§1 複素数平面

001

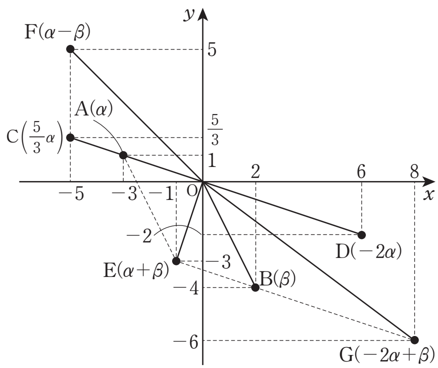
(1) 点 A(α) は点 $(-3, 1)$ に，点 B(β) は点 $(2, -4)$ に対応する．

$$\frac{5}{3}\alpha=\frac{5}{3}(-3+i)=-5+\frac{5}{3}i$$
$$-2\alpha=-2(-3+i)=6-2i$$

より，点 C$\left(\frac{5}{3}\alpha\right)$，点 D$(-2\alpha)$ はそれぞれ点 $\left(-5, \frac{5}{3}\right)$，点 $(6, -2)$ に対応する．

$$\alpha+\beta=(-3+i)+(2-4i)=-1-3i$$
$$\alpha-\beta=(-3+i)-(2-4i)=-5+5i$$
$$-2\alpha+\beta=-2(-3+i)+(2-4i)=8-6i$$

より，点 E$(\alpha+\beta)$，点 F$(\alpha-\beta)$，点 G$(2\alpha+\beta)$ はそれぞれ点 $(-1, -3)$，点 $(-5, 5)$，点 $(8, -6)$ に対応する．



(2) 0，α，γ が一直線上にあるとき

$$\gamma=t\alpha \quad \therefore\ 2-ci=t(-3+i)\quad (t \text{ は実数})$$

と表せ

$$2-ci=-3t+ti$$

よって

$$2=-3t \text{ かつ } -c=t$$

$$\therefore\ t=-\frac{2}{3} \quad \therefore\ \boldsymbol{c=\frac{2}{3}}$$

002

(1) $z=x+yi$ (x, y は実数) とおくと，与式は

$$3(x+yi)-i(x-yi)=4$$
$$\therefore\ 3x-y+(3y-x)i=4$$

$3x-y$，$3y-x$ は実数であるから

$$3x-y=4 \text{ かつ } 3y-x=0$$

$$\therefore\ x=\frac{3}{2},\ y=\frac{1}{2} \quad \therefore\ \boldsymbol{z=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i}$$

別解　$3z-i\overline{z}=4$…①

①より　$\overline{3z-i\overline{z}}=\overline{4}$

∴ $3\overline{z}-\overline{i}\,\overline{\overline{z}}=\overline{4}$　∴ $3\overline{z}+iz=4$…②

3×①＋i×②より

$$(9-1)z=12+4i \quad \therefore\ \boldsymbol{z=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i}$$

(2) $\dfrac{\alpha}{1+\alpha^2}$ が実数であるとき

$$\overline{\left(\frac{\alpha}{1+\alpha^2}\right)}=\frac{\alpha}{1+\alpha^2}$$

(左辺)$=\dfrac{\overline{\alpha}}{\overline{1+\alpha^2}}=\dfrac{\overline{\alpha}}{1+(\overline{\alpha})^2}$ であるから

$$\frac{\overline{\alpha}}{1+(\overline{\alpha})^2}=\frac{\alpha}{1+\alpha^2}$$

$$\therefore\ \overline{\alpha}(1+\alpha^2)=\alpha\{1+(\overline{\alpha})^2\} \quad (\alpha^2 \neq -1)$$
$$\therefore\ \alpha\overline{\alpha}(\alpha-\overline{\alpha})-(\alpha-\overline{\alpha})=0$$
$$\therefore\ (\alpha-\overline{\alpha})(\alpha\overline{\alpha}-1)=0$$
$$\therefore\ \alpha=\overline{\alpha} \text{ または } \alpha\overline{\alpha}=1$$

よって，α は実数　または　$\alpha\overline{\alpha}=1$

したがって，複素数 α が実数ではないとき

$$\boldsymbol{\alpha\overline{\alpha}=1}$$

003

(1) 方程式の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=1-k$$

(i) $k\leqq 1$ のとき，$D\geqq 0$ であり，方程式の解は実数であるから，$f(z)=z^2-2z+k$ とおくと，絶対値 2 の解をもつ条件は

$$f(2)=k=0 \text{ または } f(-2)=8+k=0$$
$$\therefore\ k=0,\ -8$$

(ii) $k>1$ のとき，$D<0$ であり，このとき方程式の解は虚数であり，1 つの解を α とすると，もう 1 つの解は $\overline{\alpha}$ である．このとき，絶対値 2 の解をもつ条件は

$$|\alpha|=2 \quad \therefore\ \alpha\overline{\alpha}=4$$

解と係数の関係より　$k=4$

(i)，(ii)より　$\boldsymbol{k=-8,\ 0,\ 4}$

(2)
$$|(2+5i)-(-3-2i)|=|5+7i|=\sqrt{5^2+7^2}$$
$$=\boldsymbol{\sqrt{74}}$$

TRIAL

条件より　$|z|=1$…①

(1) ①より

$$|z|^2=1 \quad \therefore\ z\overline{z}=1 \quad \therefore\ \overline{z}=\frac{1}{z}$$

$=\left(r+\dfrac{2}{r}\right)\cos\theta+i\left(r-\dfrac{2}{r}\right)\sin\theta$

$\therefore\ x=\left(r+\dfrac{2}{r}\right)\cos\theta,\ y=\left(r-\dfrac{2}{r}\right)\sin\theta\cdots$①

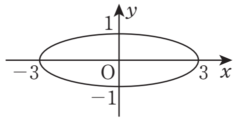
点 z が原点を中心とする単位円周上を動くとき，$r=1$ なので

$x=3\cos\theta,\ y=-\sin\theta$

よって

$\left(\dfrac{x}{3}\right)^2+(-y)^2=1\quad\therefore\ \dfrac{x^2}{9}+y^2=1\cdots$②

点 w の描く図形は楕円②である.



⑵　点 z が 2 点 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i$，$\sqrt{3}+i$ を結ぶ線分上を動くとき　$\theta=\dfrac{\pi}{6}$，$1\leqq r\leqq 2$

①に代入して

$x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(r+\dfrac{2}{r}\right)\cdots$③

$y=\dfrac{1}{2}\left(r-\dfrac{2}{r}\right)\cdots$④

③$+\sqrt{3}\times$④ より　$r=\dfrac{x+\sqrt{3}y}{\sqrt{3}}$

これを③と $1\leqq r\leqq 2$ に代入して

$x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(\dfrac{x+\sqrt{3}y}{\sqrt{3}}+\dfrac{2\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}y}\right)$

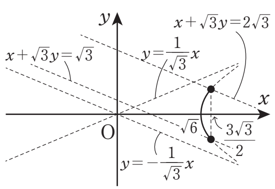
かつ $1\leqq\dfrac{x+\sqrt{3}y}{\sqrt{3}}\leqq 2$

$\therefore\ \dfrac{x^2}{6}-\dfrac{y^2}{2}=1\cdots$⑤

かつ $\sqrt{3}\leqq x+\sqrt{3}y\leqq 2\sqrt{3}$

点 w の描く図形は，双曲線⑤のうち

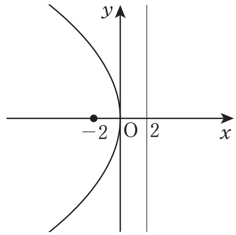
$\sqrt{6}\leqq x\leqq\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ の部分である.



§2 式と曲線

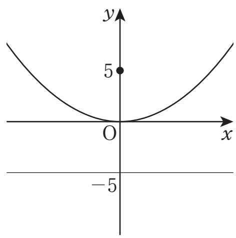
017

⑴　条件より，点 P の軌跡は放物線である．焦点が $(-2,0)$，準線が $x=2$ であるから，その方程式は $y^2=4px\ (p\neq 0)$ と表せ，$p=-2$ である.



よって　$\boldsymbol{y^2=-8x}$

⑵　焦点が $(0,5)$，準線が $y=-5$ であるから，その方程式は $x^2=4py\ (p\neq 0)$ と表せ，$p=5$ である.

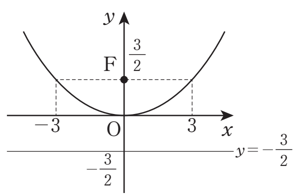


よって　$\boldsymbol{x^2=20y}$

⑶　与式は $x^2=4\cdot\dfrac{3}{2}y$ と表せ，頂点は原点

焦点は y 軸上で　$\left(\boldsymbol{0,\dfrac{3}{2}}\right)$

準線は　$\boldsymbol{y=-\dfrac{3}{2}}$



018

⑴　条件より，点 P の軌跡は楕円である．焦点が $(0,\pm 4)$，距離の和が 12 であることから，その方程式は $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (b>a>0)$ と表され

$2\mathrm{PF}=\sqrt{3}\,\mathrm{PH}$ より

$$(2r)^2=3\left(r\cos\theta-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2$$

$$\therefore\ (4-3\cos^2\theta)r^2+2\sqrt{3}(\cos\theta)r-1=0$$

$$\therefore\ \{(2-\sqrt{3}\cos\theta)r+1\}\{(2+\sqrt{3}\cos\theta)r-1\}=0$$

$(2-\sqrt{3}\cos\theta)r+1>0$ より

$$(2+\sqrt{3}\cos\theta)r-1=0$$

$$\therefore\ \boldsymbol{r=\frac{1}{2+\sqrt{3}\cos\theta}}$$

036

直交座標で (x, y) と表される点Pが，極座標で (r, θ) と表されるとすると

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta$$

楕円 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1\cdots$①に代入すると

$$(r\cos\theta)^2+4(r\sin\theta)^2=4$$

$$\therefore\ r^2(\cos^2\theta+4\sin^2\theta)=4$$

$$\therefore\ r^2=\frac{4}{\cos^2\theta+4\sin^2\theta}\cdots②$$

これは楕円①の極方程式である．

いま，OP，OQ，ORが互いに $\dfrac{2}{3}\pi$ の角をなすとき，極座標で

$$\mathrm{P}(r_1, \theta),\ \mathrm{Q}\left(r_2, \theta+\frac{2}{3}\pi\right),\ \mathrm{R}\left(r_3, \theta-\frac{2}{3}\pi\right)$$

と表せ，P，Q，Rは楕円①上なので，②の式をみたし

$$r_1^2=\frac{4}{\cos^2\theta+4\sin^2\theta}$$

$$r_2^2=\frac{4}{\cos^2\left(\theta+\frac{2}{3}\pi\right)+4\sin^2\left(\theta+\frac{2}{3}\pi\right)}$$

$$r_3^2=\frac{4}{\cos^2\left(\theta-\frac{2}{3}\pi\right)+4\sin^2\left(\theta-\frac{2}{3}\pi\right)}$$

よって

$$\frac{1}{\mathrm{OP}^2}+\frac{1}{\mathrm{OQ}^2}+\frac{1}{\mathrm{OR}^2}=\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}+\frac{1}{r_3^2}$$

$$=\frac{\cos^2\theta+4\sin^2\theta}{4}$$

$$+\frac{\cos^2\left(\theta+\frac{2}{3}\pi\right)+4\sin^2\left(\theta+\frac{2}{3}\pi\right)}{4}$$

$$+\frac{\cos^2\left(\theta-\frac{2}{3}\pi\right)+4\sin^2\left(\theta-\frac{2}{3}\pi\right)}{4}\cdots③$$

ここで

$$\cos^2\theta+\cos^2\left(\theta+\frac{2}{3}\pi\right)+\cos^2\left(\theta-\frac{2}{3}\pi\right)$$

$$=\cos^2\theta+\left(-\frac{1}{2}\cos\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\right)^2$$

$$+\left(-\frac{1}{2}\cos\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\right)^2$$

$$=\frac{3}{2}(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=\frac{3}{2}$$

$$\sin^2\theta+\sin^2\left(\theta+\frac{2}{3}\pi\right)+\sin^2\left(\theta-\frac{2}{3}\pi\right)$$

$$=\sin^2\theta+\left(-\frac{1}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right)^2$$

$$+\left(-\frac{1}{2}\sin\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right)^2$$

$$=\frac{3}{2}(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=\frac{3}{2}$$

よって

$$③=\frac{\frac{3}{2}+4\cdot\frac{3}{2}}{4}=\frac{15}{8}\quad(一定)$$

終

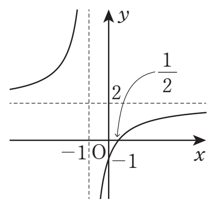
§3 関数

037

(1)　$2x-1=(x+1)\cdot 2-3$ より

$$y=2+\frac{-3}{x+1}$$

よって，$y=\dfrac{2x-1}{x+1}$ のグラフは $y=-\dfrac{3}{x}$ のグラフを x 軸方向に -1，y 軸方向に2だけ平行移動したものである．



(2)　方程式 $\dfrac{2x-1}{x+1}=x-1\cdots$① より

$$2x-1=(x+1)(x-1)\quad\therefore\ x^2-2x=0$$

$\therefore\ x(x-2)=0\quad\therefore\ \boldsymbol{x=0,\ 2}$