はじめに

この本は，教科書で学ぶ基本的知識と入試に向けた実践的学習を結びつけるための問題集です．入試問題は教科書からすればかなり高度に見えますが，教科書以上の知識が必要なわけではありません．必要なのは，教科書にある重要事項の意味を正確に理解し，それを具体的に応用し，論理的に発展させる力です．こうした力をつけるためにまず必要なことは，教科書にある重要事項がどのような意味をもち，どのように関係しあっているかを，基本的な問題の解法のなかでしっかりと理解することです．そして，「問題」を解くにあたって，何が大切であったかを言葉にしてみたり，定式化してみることが重要です．BASICと言っていますが，少し難しく感じるところがあるかもしれません．基本と実践の間に橋を渡すときには，ある種の難しさを感じながらも，それに動じることなく，前へ前へと進んでいく大胆さも大事ではないでしょうか．この問題集はそれほど厚くありませんが，公式の成り立ちを理解するうえで必要なことはできるだけのせてあります．はじめは各分野の全体像を大ざっぱにつかむことが大切です．まずは，この本のなかで完結している論理的な方法を身につけるようにしてください．そのために，この本の例題にくりかえし立ちかえり，ねばり強く考える力を養ってください．

この問題集ができるまでにたくさんの方々のお世話になりました．当初議論に加わり貴重なご意見をいただいた手島史夫先生，原稿に目を通し有益なコメントをいただいた小沢英雄先生，改訂に際して当を得たご助言をいただいた齋藤大成先生，ありがとうございました．多大なご苦労をおかけした文庫編集部の方々，はじめは，松永正則さん，大坂美緒さん，中越邁さん，そして，改訂に際して，加藤達也さん，林拓実さん，前橋桂介さん，ありがとうございました．そして，折々に著者の疑問に付き合ってくれた多くの先生方，職員の方々に感謝申し上げます．

著者を代表して　　桐山宣雄

本書の特長と利用法

実際の使い方としては

1. まず 例題 を解いてみてください.
2. それから **解答**を確認し，自分の今いる地点(実力)を確認してください.(問題は解けたか．言葉の意味は知っていたか，公式は覚えていたか，公式は使えたか，計算はできたか，などなど.)
3. 例題が解けず，解答を読んだものについては，間をあけず **復習問題**を紙の上で解いてみてください.（そのため多くの復習問題は例題と同程度の類題にとどめてあります.）真似て解いてみることも基礎を定着させるにはとても大切なことです.
4. 疑問がわいたら，計算については**傍注**，理論的な事については Assist を見ること．**公式**は基礎として重要な定理はおおよそのせてあります.必要に応じて，概念の約束である定義も傍注や公式の中にちりばめておきました.（より詳しい説明が知りたくなったら，面倒がらずに教科書等に戻ってください.）
5. ジェーマ は推論の仕方を思い出しやすいように，みじかい言葉(こういう時はこう考えるという図式)で示したものです．各自，自分なりの言葉でやり方を整理するのもいいでしょう.

数学においては，理論のもつ意味に注意しながら，**論理的思考力**と**思考の柔軟性**を養うことが大切です．そのために，この問題集で基礎を確認し，そこから，さらなる実戦的な問題に挑戦し，つねに未知なる世界をめざしてほしいと思います．その途上でくりかえし立ち返る土台として，この問題集を使っていただければさいわいです.

目次

§ 1. 複素数と方程式・式と証明（数Ⅱ）

001. ３次式の展開，因数分解…… 8
002. 二項定理とその応用…… 9
003. 二項係数の性質…… 10
004. 整式の割り算…… 11
005. 分数式…… 12
006. 恒等式，等式の証明①…… 13
007. 等式の証明②，式の値…… 14
008. 不等式の証明…… 15
009. 相加平均と相乗平均…… 16
010. ２つの文字に関する恒等式…… 17
011. ２次方程式の複素数解…… 18
012. ２次方程式の解と係数の関係… 19
013. 余りの計算…… 20
014. 剰余の定理，因数定理…… 21
015. １の３乗根…… 22
016. 因数定理による３次方程式の解法 …… 23
017. ３次方程式の解と係数の関係… 24
018. ３次方程式が解をもつ条件…… 25
019.「相反」方程式 …… 26

§ 2. 図形と方程式（数Ⅱ）

020. ２点間の距離と分点…… 27
021. 直線の平行・垂直…… 28
022. 直線に関して対称な点…… 29
023. ３直線が三角形を作らない条件 …… 30
024. 点と直線の距離…… 31
025. 円の方程式…… 32
026. 円と直線…… 33
027. 円の接線…… 34
028. ２円の位置関係…… 35
029. ２円の共有点を通る図形…… 36
030. 不等式の表す領域…… 37
031. 線分と直線が共有点をもつ条件 …… 38
032. 領域における最大・最小…… 39
033. $\mathrm{AP}:\mathrm{BP}=m:n$ をみたす点 P の軌跡 …… 40
034. $x=f(t)$，$y=g(t)$ をみたす (x, y) の軌跡…… 41
035. ２交点の中点の軌跡…… 42
036. ２直線の交点の軌跡…… 43
037. 通過領域…… 44
038. 点の存在範囲…… 45

§ 3. 三角関数（数Ⅱ）

039. 三角関数の基本…… 46
040. 三角関数の計算…… 47
041. 三角関数のグラフ…… 48
042. １次の三角方程式…… 49
043. 三角関数の２次式①…… 50
044. 加法定理…… 51
045. ２倍角・半角の公式…… 52
046. ３倍角の公式…… 53
047. 三角関数の合成…… 54

048. 三角関数の２次式②…… 55
049. 三角関数の２次式③…… 56
050. 三角方程式の解の個数…… 57
051. ２直線のなす角…… 58
052. 和と積の公式…… 59
053. 図形と最大・最小…… 60

§４. 指数関数と対数関数（数Ⅱ）

054. 累乗の計算…… 61
055. 指数方程式・不等式…… 62
056. 対数の計算…… 63
057. 対数方程式…… 64
058. 対数不等式…… 65
059. 桁数と最高位の数…… 66
060. 最大・最小に関する問題…… 67
061. 領域に関する問題…… 68
062. 対数方程式の解の個数…… 69
063. a^x+a^{-x} に関する問題…… 70
064. 無理数となる対数の証明…… 71

§５. 微分法と積分法（数Ⅱ）

065. 極限，微分係数…… 72
066. 微分の計算…… 73
067. ３次関数の接線…… 74
068. ３次関数のグラフ…… 75
069. ３次関数の極値…… 76
070. ３次関数の最大・最小①…… 77
071. ３次関数の最大・最小②…… 78
072. ３次方程式の解…… 79
073. ３次方程式の解の個数…… 80
074. 接線が一致する…… 81
075. 接線の本数…… 82
076. 不等式の証明…… 83
077. 図形問題への微分の応用…… 84
078. ４次関数のグラフ…… 85
079. 積分の計算①…… 86
080. 積分の計算②…… 87
081. 定積分で表された関数…… 88
082. 面積①…… 89
083. 絶対値を含む積分…… 90
084. 面積②…… 91
085. 面積の変化…… 92
086. 面積③…… 93
087. ３次関数のグラフと接線で囲まれた部分の面積…… 94

§６. 数　列（数B）

088. 等差数列…… 95
089. 等比数列…… 96
090. 和の計算…… 97
091. 階差数列…… 98
092. 和の計算の応用①…… 99
093. 和の計算の応用②…… 100
094. 群数列…… 101
095. ２項間漸化式①…… 102
096. ２項間漸化式②…… 103
097. ２項間漸化式③…… 104
098. ２項間漸化式④…… 105
099. 和と一般項…… 106
100. ３項間漸化式…… 107
101. 連立漸化式…… 108
102. 数学的帰納法…… 109
103. 格子点…… 110

104. 確率漸化式……111

§ 7. 統計的推測　（数B）

105. 確率分布と平均・分散……112
106. 確率変数の変換……113
107. 確率変数の性質……114
108. 確率変数の独立……115
109. 二項分布……116
110. 確率密度関数……117
111. 正規分布と標準正規分布……118
112. 二項分布の正規分布による近似……119
113. 標本平均……120
114. 標本平均の分布と正規分布……121
115. 母平均の推定……122
116. 母比率の推定……123
117. 仮説検定①……124
118. 仮説検定②……125

§ 8. ベクトル　（数C）

119. ベクトルの演算……126
120. 一直線上にある３点……127
121. 重心のベクトル……128
122. 内心のベクトル……129
123. 三角形 ABC に対する点 P の位置……130
124. 交点の位置ベクトル……131
125. ベクトルの内積……132
126. 内積の計算……133
127. 成分の平行条件・垂直条件，内積計算……134
128. 三角形の外心の位置ベクトル…135
129. 平面上の点の存在範囲……136
130. 直線のベクトル方程式①……137
131. 円のベクトル方程式……138
132. 図形の応用……139
133. 空間のベクトル・同一直線上にある条件……140
134. 直線のベクトル方程式②……141
135. 平面と直線の交点……142
136. 空間ベクトルの位置ベクトルによる内積計算……143
137. 空間ベクトルの成分による内積計算……144
138. 成分による四面体の体積……145
139. ２直線上の２点の距離……146
140. 球面と平面の交わりの円……147

復習の答（結果のみ）……148
自己チェック表……158
巻末：正規分布表

例題 001　3 次式の展開，因数分解

(1)　$(3x+2)^3$ を展開せよ．

(2)　$8x^3+125y^3$ を因数分解せよ．

(3)　x^6-1 を因数分解せよ．

解　(1)　$(3x+2)^3=(3x)^3+3(3x)^2\cdot 2+3(3x)\cdot 2^2+2^3$

$$=27x^3+54x^2+36x+8$$

(2)　$8x^3+125y^3=(2x)^3+(5y)^3$

$$=\{(2x)+(5y)\}\{(2x)^2-(2x)(5y)+(5y)^2\}$$

$$=(2x+5y)(4x^2-10xy+25y^2)$$

(3)　$x^6-1=(x^3)^2-1$

$$=(x^3+1)(x^3-1)$$

$$=(x+1)(x^2-x+1)(x-1)(x^2+x+1)$$

Assist

(3)は次のようにしてもよい．

$$x^6-1=(x^2)^3-1=(x^2-1)\{(x^2)^2+x^2+1\}$$

$$=(x+1)(x-1)(x^4+x^2+1)=(x+1)(x-1)\{(x^2+1)^2-x^2\}$$

$$=(x+1)(x-1)\{(x^2+1)+x\}\{(x^2+1)-x\}$$

$$=(x+1)(x-1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$$

《3 次の展開公式》　$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

《3 次の因数分解公式》　$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

ジェーマ

3 次式 ⟹ $\begin{cases}(\square\pm\triangle)^3\\ \square^3\pm\triangle^3\end{cases}$ の形とみなす

復習 001

(1)　$(3x^3-4)^3$ を展開せよ．

(2)　$(2x+3y)(4x^2-6xy+9y^2)$ を展開せよ．

(3)　a^6-64b^9 を因数分解せよ．

(4)　x^6-7x^3-8 を因数分解せよ．

例題 002 二項定理とその応用

(1) $(3x+2)^6$ の展開式で x^4 の係数を求めよ．

(2) $\left(2x^2+\dfrac{1}{x}\right)^8$ の展開式で x の係数を求めよ．

(3) $(a+b+c)^7$ を展開したときの $a^3b^2c^2$ の係数を求めよ．

解 (1) $(3x+2)^6$ の展開式の一般項は　${}_6\mathrm{C}_r(3x)^{6-r}2^r$　$(r=0, 1, 2, \cdots, 6)$

つまり，${}_6\mathrm{C}_r 2^r 3^{6-r}x^{6-r}$ であるから，x^4 の項となるのは　$6-r=4$　$\therefore\ r=2$

よって，x^4 の係数は　${}_6\mathrm{C}_2 2^2\cdot 3^{6-2}=15\cdot 4\cdot 81=\mathbf{4860}$

(2) $\left(2x^2+\dfrac{1}{x}\right)^8$ の展開式の一般項は　${}_8\mathrm{C}_r(2x^2)^{8-r}\left(\dfrac{1}{x}\right)^r$　$(r=0, 1, 2, \cdots, 8)$

つまり，${}_8\mathrm{C}_r 2^{8-r}x^{16-3r}$ であるから，x の項となるのは　$16-3r=1$　$\therefore\ r=5$

よって，x の係数は　${}_8\mathrm{C}_5 2^{8-5}={}_8\mathrm{C}_3 2^3=\dfrac{8\cdot 7\cdot 6}{3\cdot 2\cdot 1}\cdot 8=\mathbf{448}$

(3) $(a+b+c)^7=\{(a+b)+c\}^7$ より，$(a+b+c)^7$ の展開式のそれぞれの項は

$${}_7\mathrm{C}_r(a+b)^{7-r}c^r\quad (r=0, 1, 2, \cdots, 7)\quad \cdots①$$

をさらに展開して得られる．$a^3b^2c^2$ の項は，c の 2 乗の項なので，$r=2$ のときの①の展開式の一つの項である．このとき，①は ${}_7\mathrm{C}_2(a+b)^5c^2\cdots②$ であり，このうち $(a+b)^5$ の展開式の一般項は ${}_5\mathrm{C}_k a^{5-k}b^k$ $(k=0, 1, \cdots, 5)$ であるから，②の展開式の一般項は ${}_7\mathrm{C}_2({}_5\mathrm{C}_k a^{5-k}b^k)c^2$ である．つまり，${}_7\mathrm{C}_2\cdot{}_5\mathrm{C}_k a^{5-k}b^kc^2$ であるから，$a^3b^2c^2$ の項はこのうちの $k=2$ のときで，$a^3b^2c^2$ の係数は　${}_7\mathrm{C}_2\cdot{}_5\mathrm{C}_2=\mathbf{210}$

Assist

(3)は次のように考えることもできる．$(a+b+c)^7=(a+b+c)(a+b+c)\cdots(a+b+c)$ を展開したとき，$a^3b^2c^2$ の項は 7 個の因数のうち，3 個から a，2 個から b，2 個から c をとり出すことによって得られる．このとり出し方は，a を 3 個，b を 2 個，c を 2 個並べる方法と同じだけあり，$\dfrac{7!}{3!2!2!}=210$ 通りである．$a^3b^2c^2$ の項がこれだけあることになり，これが $a^3b^2c^2$ の係数である．

一般に，$(a+b+c)^n$ の展開式の一般項は $\dfrac{n!}{p!q!r!}a^pb^qc^r$ $(p+q+r=n)$ である．

《二項定理》　$(a+b)^n={}_n\mathrm{C}_0 a^n+{}_n\mathrm{C}_1 a^{n-1}b+{}_n\mathrm{C}_2 a^{n-2}b^2+\cdots$
$\cdots+{}_n\mathrm{C}_r a^{n-r}b^r+\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}ab^{n-1}+{}_n\mathrm{C}_n b^n$

シェーマ

$(a+b)^n$ の展開式 ⟹ 一般項は ${}_n\mathrm{C}_r\, a^{n-r}\, b^r$　$(r=0, 1, 2, \cdots, n)$

復習 002　次の項の係数を求めよ．

(1) $(2x^2-3)^8$ の x^6　(2) $\left(3x^3-\dfrac{2}{x^2}\right)^7$ の x　(3) $\left(1+\dfrac{2}{x}+x^2\right)^8$ の定数項

例題 054 累乗の計算

(1) 次の式を計算せよ．ただし，$a>0$ とする．

(i) $\sqrt[6]{8}+\sqrt[4]{4}-\sqrt{8}$　　(ii) $\sqrt[4]{16}\div\sqrt[3]{-8}$　　(iii) $\sqrt{a\sqrt[3]{a\sqrt[4]{a}}}$

(2) $a^{2x}=3$ のとき，$\dfrac{a^x+a^{-x}}{a^{3x}+a^{-3x}}$ の値を求めよ．ただし，$a>0$ とする．

解 (1) (i) (与式)$=\sqrt[6]{2^3}+\sqrt[4]{2^2}-\sqrt{2^3}=2^{\frac{3}{6}}+2^{\frac{2}{4}}-2^{\frac{3}{2}}$　　← $\sqrt{\ }$ は $\sqrt[2]{\ }$ と同じ．

$=\sqrt{2}+\sqrt{2}-2\sqrt{2}=\mathbf{0}$

(ii) (与式)$=\sqrt[4]{2^4}\div\sqrt[3]{(-2)^3}=2^{\frac{4}{4}}\div(-2)^{\frac{3}{3}}=2\div(-2)=\mathbf{-1}$

(iii) (与式)$=\sqrt{a\cdot\sqrt[3]{a\cdot a^{\frac{1}{4}}}}=\sqrt{a\cdot\sqrt[3]{a^{\frac{5}{4}}}}=\sqrt{a\cdot a^{\frac{5}{12}}}=\sqrt{a^{\frac{17}{12}}}=\boldsymbol{a^{\frac{17}{24}}}$

(2) (与式)$=\dfrac{a^x+a^{-x}}{(a^x+a^{-x})(a^{2x}-a^x\cdot a^{-x}+a^{-2x})}$

$=\dfrac{1}{a^{2x}-1+a^{-2x}}=\dfrac{1}{3-1+\frac{1}{3}}=\boldsymbol{\dfrac{3}{7}}$

← $a^x=A$，$a^{-x}=B$ とすると
(分母)$=a^{3x}+a^{-3x}$
$=A^3+B^3$
$=(A+B)(A^2-AB+B^2)$

Assist

《累乗根の定義》 $x^n=a$（n は自然数）…(＊) をみたす（n 乗すると a になる）x を a の n 乗根という．正の数 a に対して，(＊) をみたす正の数 x はただ1つ定まり，これを $\sqrt[n]{a}$ で表す．このとき，(＊) の解は，n が奇数のとき，$\sqrt[n]{a}$ だけであり，n が偶数のとき，$\pm\sqrt[n]{a}$ である．また，負の数 a に対して，n が奇数のとき，(＊) をみたす負の数 x はただ1つ定まり，これを $\sqrt[n]{a}$ で表す．このとき，(＊) の解は $\sqrt[n]{a}$ だけであり，n が偶数のとき，解はない．

《指数の拡張》 $a\neq0$ で，n が正の整数のとき，$a^0=1$，$a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$ と定める．

$a>0$ で，m，n が正の整数，r が正の有理数のとき，$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$，$a^{-r}=\dfrac{1}{a^r}$ と定める．

《指数法則》 $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$　$\dfrac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$　$(a^m)^n=a^{mn}$　$(ab)^n=a^n b^n$　$\left(\dfrac{a}{b}\right)^n=\dfrac{a^n}{b^n}$

シェーマ

$\sqrt[n]{A^m}$ と $\sqrt[k]{B^l}$ の計算 ⟹ 底をそろえて $\sqrt[\square]{C^{\triangle}}$ $(C^{\frac{\triangle}{\square}})$ の形にそろえる

復習 054 (1) 次の式を計算せよ．

(i) $\sqrt[3]{24}-\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{-81}$　　(ii) $4^{\frac{2}{3}}\div24^{\frac{1}{3}}\times18^{\frac{2}{3}}$

(2) $a^{2x}=5$ のとき，$\dfrac{a^x-a^{-x}}{a^{3x}-a^{-3x}}$ の値を求めよ．ただし，$a>0$ とする．

TRIAL $\sqrt{3}$，$\sqrt[3]{5}$，$\sqrt[4]{7}$，$\sqrt[6]{19}$ を小さい方から順に並べよ．また，2^{105}，3^{60}，5^{45} ではどうか．

例題 055 指数方程式・不等式

次の方程式・不等式を解け.

(1) $3^{2x}-3^{x+1}-54=0$

(2) $\dfrac{1}{4^x}-3\left(\dfrac{1}{2}\right)^x-4\leqq 0$

(3) $a^{2x}+a^x-2>0$ $(a>0,\ a\neq 1)$

解 (1) (与式) $\Leftrightarrow (3^x)^2-3^x\cdot 3^1-54=0$

$3^x=X$ とおくと

$$X^2-3X-54=0 \quad \therefore\ (X-9)(X+6)=0$$

$X>0$ より $X=9$ $\therefore\ 3^x=3^2$ $\therefore\ \boldsymbol{x=2}$

(2) (与式) $\Leftrightarrow \left(\dfrac{1}{2}\right)^{2x}-3\left(\dfrac{1}{2}\right)^x-4\leqq 0$

$\left(\dfrac{1}{2}\right)^x=X$ とおくと

$$X^2-3X-4\leqq 0 \quad \therefore\ (X-4)(X+1)\leqq 0$$

$X>0$ より $0<X\leqq 4$ $\therefore\ 0<\left(\dfrac{1}{2}\right)^x\leqq\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2}$

底が $\dfrac{1}{2}(<1)$ であるから $\boldsymbol{x\geqq -2}$

(3) (与式) $\Leftrightarrow (a^x)^2+a^x-2>0$

$a^x=X$ とおくと

$$X^2+X-2>0 \quad \therefore\ (X+2)(X-1)>0$$

$X>0$ より

$$X>1 \quad \therefore\ a^x>1(=a^0)$$

よって $\begin{cases} \boldsymbol{0<a<1} \text{ のとき } \boldsymbol{x<0} \\ \boldsymbol{a>1} \text{ のとき } \boldsymbol{x>0} \end{cases}$

《指数方程式・不等式の変形》 $a^A=a^B \Leftrightarrow A=B$

$a^A>a^B \Leftrightarrow \begin{cases} A>B\ (a>1) \\ A<B\ (0<a<1) \end{cases}$

シェーマ

$pa^{2x}+qa^x+r$ ⋙ $a^x=X$ とおくと X の 2 次式

復習 055

(1) $8^{x+1}-17\cdot 4^x+2^{x+1}=0$ を解け.

(2) $\dfrac{1}{27^{x-1}}<\dfrac{1}{9^x}$ を解け.

(3) $a^{2x+1}-a^{x+2}-a^{x-1}+1<0$ $(a>0,\ a\neq 1)$ を解け.

例題 119 ベクトルの演算

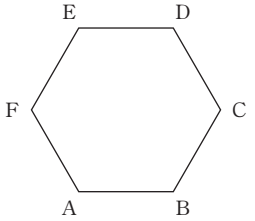
図の正六角形ABCDEFにおいて

(1) $\overrightarrow{AC}$ を $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AF}$ で表せ.

(2) $\overrightarrow{AD}$ を $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AF}$ で表せ.

(3) $\overrightarrow{DB}$ を $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AF}$ で表せ.

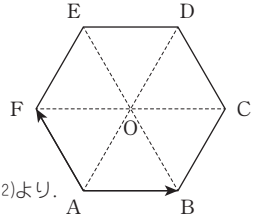
(4) $\overrightarrow{AB}$ を $\overrightarrow{AC}$ と $\overrightarrow{DB}$ で表せ.



解 (1) 正六角形ABCDEFの中心をOとすると

$\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AF}$

よって $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AF})=\mathbf{2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AF}}$



(2) $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AO}=2(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AF})=\mathbf{2\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AF}}$

(3) $\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}-(2\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AF})=\mathbf{-\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AF}}$ ←(2)より.

(4) (1)より $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AF}$ …①

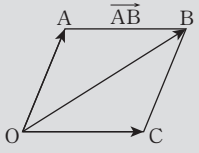
(3)より $\overrightarrow{DB}=-\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AF}$ …②

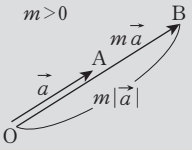
$\frac{1}{3}(2\times①+②)$ より $\frac{1}{3}(2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB})=\overrightarrow{AB}$ $\therefore$ $\mathbf{\overrightarrow{AB}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{DB}}$

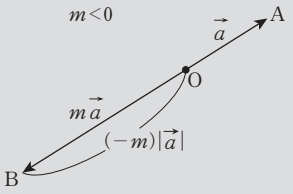
《ベクトルの演算》

(和) $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}$ (差) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$

$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}$ (実数倍) $\overrightarrow{OB}=m\overrightarrow{OA}$







《ベクトルの平行》 $\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{b}\neq\vec{0}$ のとき

$\vec{a}\,/\!/\,\vec{b} \Leftrightarrow \vec{b}=k\vec{a}$ となる実数 k がある

シェーマ

2つのベクトルの和 ⟫ 始点をそろえて平行四辺形を作る

or 始点と終点を一致させる

復習 | 119

半径1の円に内接する正八角形ABCDEFGHにおいて, $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AH}=\vec{b}$ とおく.

(1) ベクトル $\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{a}+\vec{b}$ の大きさを求めよ.

(2) ベクトル $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AD}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ を用いて表せ.

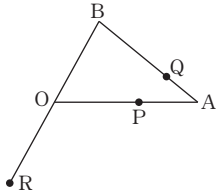
(3) $\vec{a}$ を $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AD}$ を用いて表せ.

例題 120　一直線上にある 3 点

△OAB において，辺 OA を 3:2 に内分する点を P，辺 AB を 1:3 に内分する点を Q，辺 BO を 2:1 に外分する点を R とする．

(1)　$\overrightarrow{PQ}$ を $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ を用いて表せ．

(2)　3 点 P，Q，R は一直線上にあることを示せ．



解　(1)　点 P は辺 OA を 3:2 に内分する点であるから

$$\overrightarrow{OP}=\frac{3}{3+2}\overrightarrow{OA}=\frac{3}{5}\overrightarrow{OA}$$

点 Q は辺 AB を 1:3 に内分する点であるから

$$\overrightarrow{OQ}=\frac{3\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{1+3}=\frac{1}{4}(3\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$$

よって　$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}=\left(\frac{3}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{OB}\right)-\frac{3}{5}\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{\frac{3}{20}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{OB}}$ …①

(2)　点 R は辺 BO を 2:1 に外分する点であるから　$\overrightarrow{OR}=-\overrightarrow{OB}$

よって　$\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{OR}-\overrightarrow{OP}=-\overrightarrow{OB}-\frac{3}{5}\overrightarrow{OA}=\frac{-1}{5}(3\overrightarrow{OA}+5\overrightarrow{OB})$ …②　← $\overrightarrow{PR}$ を $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ で表す．

また，①より　$\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{20}(3\overrightarrow{OA}+5\overrightarrow{OB})$

これと②より，$\overrightarrow{PR}=-4\overrightarrow{PQ}$ と表せるから，3 点 P，Q，R は一直線上にある．　終

《内分点の位置ベクトル》　AB を $m:n$ に内分する点を P とすると

$$\overrightarrow{OP}=\frac{n\overrightarrow{OA}+m\overrightarrow{OB}}{m+n}$$

シェーマ

3 点 P，Q，R は同一直線上 ⟹ $\overrightarrow{PR}\,/\!/\,\overrightarrow{PQ}$ より $\overrightarrow{PR}=t\overrightarrow{PQ}$ と表せる

ベクトル

復習 | 120

△ABC において，辺 BC を 1:2 に内分する点を P，辺 AC を 3:1 に内分する点を Q，辺 AB を 6:1 に外分する点を R とする．

(1)　ベクトル $\overrightarrow{AP}$，$\overrightarrow{AQ}$，$\overrightarrow{AR}$ を $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ で表せ．

(2)　3 点 P，Q，R は一直線上にあることを示せ．

§1 複素数と方程式・式と証明

001

(1) $(3x^3-4)^3$

$=(3x^3)^3-3(3x^3)^2\cdot 4+3(3x^3)\cdot 4^2-4^3$

$=\mathbf{27x^9-108x^6+144x^3-64}$

(2) $(2x+3y)(4x^2-6xy+9y^2)$

$=(2x+3y)\{(2x)^2-(2x)(3y)+(3y)^2\}$

$=(2x)^3+(3y)^3=\mathbf{8x^3+27y^3}$

(3) $a^6-64b^9=(a^2)^3-(4b^3)^3$

$=(a^2-4b^3)\{(a^2)^2+(a^2)(4b^3)+(4b^3)^2\}$

$=\mathbf{(a^2-4b^3)(a^4+4a^2b^3+16b^6)}$

(4) $x^6-7x^3-8=(x^3-8)(x^3+1)$

$=(x^3-2^3)(x^3+1^3)$

$=\mathbf{(x-2)(x^2+2x+4)(x+1)(x^2-x+1)}$

002

(1) $(2x^2-3)^8$ の展開式の一般項は

$${}_8C_r(2x^2)^{8-r}(-3)^r \quad (r=0, 1, 2, \cdots, 8)$$

つまり ${}_8C_r2^{8-r}(-3)^rx^{16-2r}$

と表せる．このうち x^6 の項となる r は

$16-2r=6 \quad \therefore\ r=5$

よって，x^6 の係数は

$${}_8C_52^{8-5}(-3)^5=-{}_8C_32^3\cdot 3^5$$

$$=-\frac{8\cdot 7\cdot 6}{3\cdot 2\cdot 1}\cdot 2^3\cdot 3^5=\mathbf{-108864}$$

(2) $\left(3x^3-\dfrac{2}{x^2}\right)^7$ の展開式の一般項は

$${}_7C_r(3x^3)^{7-r}\left(-\frac{2}{x^2}\right)^r \quad (r=0, 1, 2, \cdots, 7)$$

つまり，

$${}_7C_r3^{7-r}(-2)^rx^{21-5r}$$

と表せるので，x の項となる r は

$21-5r=1 \quad \therefore\ r=4$

よって，x の係数は

$${}_7C_43^{7-4}(-2)^4=\frac{7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2\cdot 1}\cdot 3^3\cdot 2^4=\mathbf{15120}$$

(3) $\left(1+\dfrac{2}{x}+x^2\right)^8=\left\{1+\left(\dfrac{2}{x}+x^2\right)\right\}^8$ の展開式の一般項は

$${}_8C_r1^{8-r}\left(\frac{2}{x}+x^2\right)^r \quad (r=0, 1, 2, \cdots, 8)$$

さらに，$\left(\dfrac{2}{x}+x^2\right)^r$ の展開式の一般項は

$${}_rC_k\left(\frac{2}{x}\right)^{r-k}(x^2)^k={}_rC_k2^{r-k}\cdot\frac{x^{2k}}{x^{r-k}}$$

$$={}_rC_k2^{r-k}x^{3k-r}$$

$(k=0, 1, 2, \cdots, r)$

であるから ${}_8C_r\cdot{}_rC_k\cdot 2^{r-k}x^{3k-r}$

このうち定数項となるのは

$3k-r=0 \quad \therefore\ 3k=r$

$r=0, 1, 2, \cdots, 8$ より $r=0, 3, 6$

$\therefore\ (r, k)=(0, 0),\ (3, 1),\ (6, 2)$

係数はそれぞれ ${}_8C_r\cdot{}_rC_k\cdot 2^{r-k}$ で与えられるので，定数項は

$${}_8C_0+{}_8C_3\cdot{}_3C_1\cdot 2^{3-1}+{}_8C_6\cdot{}_6C_2\cdot 2^{6-2}$$

$$=1+\frac{8\cdot 7\cdot 6}{3\cdot 2\cdot 1}\cdot 3\cdot 2^2+\frac{8\cdot 7}{2\cdot 1}\cdot\frac{6\cdot 5}{2\cdot 1}\cdot 2^4$$

$$=1+672+6720=\mathbf{7393}$$

003

二項定理より

$$(1+x)^n={}_nC_0\cdot 1^n+{}_nC_1\cdot 1^{n-1}\cdot x+{}_nC_2\cdot 1^{n-2}\cdot x^2$$
$$+\cdots+{}_nC_{n-2}\cdot 1^2\cdot x^{n-2}+{}_nC_{n-1}\cdot 1^1\cdot x^{n-1}$$
$$+{}_nC_n\cdot x^n\cdots①$$

(1) ①に $x=-1$ を代入すると

$${}_nC_0-{}_nC_1+{}_nC_2-\cdots+(-1)^n{}_nC_n=0$$ 終

(2) ①に $x=2$ を代入すると

$${}_nC_0+{}_nC_1\cdot 2+{}_nC_2\cdot 2^2+\cdots+{}_nC_n\cdot 2^n=\mathbf{3^n}$$

(3) ${}_nC_r=\dfrac{n!}{r!(n-r)!}$

${}_{n-1}C_r+{}_{n-1}C_{r-1}$

$$=\frac{(n-1)!}{r!(n-1-r)!}+\frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!}$$

$$=\frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-1-r)!}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{n-r}\right)$$

$$=\frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-1-r)!}\cdot\frac{n}{r(n-r)}$$

$$=\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

よって ${}_nC_r={}_{n-1}C_r+{}_{n-1}C_{r-1}$ 終

別解 異なる n 個のものから r 個をとり出して作る組(総数は ${}_nC_r$)は，次のように作ることもできる．まず，n 個のものから特定の1個(これをAとする)をとり出す．r 個の組がAを含むとき，A以外の $n-1$ 個から $r-1$ 個をとり出し，Aを含まないとき，A以外の $n-1$ 個から r 個をとり出す．このようにすれば，題意をみたす r 個の組が過不足なく作れる．よって ${}_nC_r={}_{n-1}C_r+{}_{n-1}C_{r-1}$ 終

$=-2\sqrt{10}\sin(\theta+\alpha)+12$

ただし，α は

$\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{10}}$，$\sin\alpha=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$ $\left(0<\alpha<+\dfrac{\pi}{2}\right)$ を

みたす定角である．

$\alpha\leqq\theta+\alpha<2\pi+\alpha$ より，

$\sin(\theta+\alpha)=-1$ のとき

最大値　$\mathbf{2\sqrt{10}+12}$

$\sin(\theta+\alpha)=1$ のとき

最小値　$\mathbf{-2\sqrt{10}+12}$

§4 指数関数と対数関数

054

(1) (i) (与式)$=\sqrt[3]{2^3\cdot3}-\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{3^4}$

$=2\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{3}-3\sqrt[3]{3}$

$=\mathbf{-2\sqrt[3]{3}}$

(ii) (与式)$=(2^2)^{\frac{2}{3}}\div(2^3\cdot3)^{\frac{1}{3}}\times(2\cdot3^2)^{\frac{2}{3}}$

$=2^{\frac{4}{3}}\div(2\cdot3^{\frac{1}{3}})\times(2^{\frac{2}{3}}\cdot3^{\frac{4}{3}})$

$=2^{\frac{4}{3}-1+\frac{2}{3}}\times3^{-\frac{1}{3}+\frac{4}{3}}$

$=2\times3$

$=\mathbf{6}$

(2) (与式)$=\dfrac{a^x-a^{-x}}{(a^x)^3-(a^{-x})^3}$

$=\dfrac{a^x-a^{-x}}{(a^x-a^{-x})(a^{2x}+a^x\cdot a^{-x}+a^{-2x})}$

$=\dfrac{1}{a^{2x}+1+a^{-2x}}$

$=\dfrac{1}{5+1+\dfrac{1}{5}}$

$=\mathbf{\dfrac{5}{31}}$

TRIAL $(\sqrt{3})^{12}=(3^{\frac{1}{2}})^{12}=3^6=729$

$(\sqrt[3]{5})^{12}=(5^{\frac{1}{3}})^{12}=5^4=625$

$(\sqrt[4]{7})^{12}=(7^{\frac{1}{4}})^{12}=7^3=343$

$(\sqrt[6]{19})^{12}=(19^{\frac{1}{6}})^{12}=19^2=361$

より　$(\sqrt[4]{7})^{12}<(\sqrt[6]{19})^{12}<(\sqrt[3]{5})^{12}<(\sqrt{3})^{12}$

x^{12} $(x>0)$ は単調増加関数なので

$\mathbf{\sqrt[4]{7}<\sqrt[6]{19}<\sqrt[3]{5}<\sqrt{3}}$

また，105，60，45 の最大公約数は 15 であることに注意して

$(2^{105})^{\frac{1}{15}}=2^7=128$

$(3^{60})^{\frac{1}{15}}=3^4=81$

$(5^{45})^{\frac{1}{15}}=5^3=125$

より　$(3^{60})^{\frac{1}{15}}<(5^{45})^{\frac{1}{15}}<(2^{105})^{\frac{1}{15}}$

$x^{\frac{1}{15}}$ は単調増加関数なので

$\mathbf{3^{60}<5^{45}<2^{105}}$

055

(1) (与式) $\Leftrightarrow(2^3)^{x+1}-17\cdot(2^2)^x+2\cdot2^x=0$

$2^3\cdot2^{3x}-17\cdot2^{2x}+2\cdot2^x=0$

$2^x=X$ とおくと

$8X^3-17X^2+2X=0$

$\therefore\ X(X-2)(8X-1)=0$

$X>0$ より　$X=2,\ \dfrac{1}{8}$　$\therefore\ 2^x=2,\ 2^{-3}$

$\therefore\ \boldsymbol{x=1,\ -3}$

(2) (与式) $\Leftrightarrow\dfrac{1}{(3^3)^{x-1}}<\dfrac{1}{(3^2)^x}\Leftrightarrow\left(\dfrac{1}{3}\right)^{3x-3}<\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2x}$

底が $\dfrac{1}{3}(<1)$ であるから

$3x-3>2x$　$\therefore\ \boldsymbol{x>3}$

(3) (与式) $\Leftrightarrow a\cdot(a^x)^2-a^2\cdot a^x-\dfrac{1}{a}\cdot a^x+1<0$

$a^x=X$ とおくと $(X>0)$

$aX^2-a^2X-\dfrac{1}{a}X+1<0$

$a^2X^2-(a^3+1)X+a<0$

$\therefore\ (X-a)(a^2X-1)<0$

(i) $0<a<1$ のとき

$a<X<\dfrac{1}{a^2}$　$\therefore\ a<a^x<a^{-2}$

$a<1$ より　$1>x>-2$　$\therefore\ -2<x<1$

(ii) $a>1$ のとき

$\dfrac{1}{a^2}<X<a$　$\therefore\ a^{-2}<a^x<a$

$a>1$ より　$-2<x<1$

(i)，(ii)より　$\boldsymbol{-2<x<1}$

056

(1) (与式)$=\log_5\sqrt{2}+\log_5\left(\dfrac{25}{12}\right)^{\frac{1}{2}}+\log_5\left(\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)^{-1}$

標本比率を R とすると，母比率 p に対する信頼度 95% の信頼区間は

$$\left[R-1.96\sqrt{\frac{R(1-R)}{n}},\ R+1.96\sqrt{\frac{R(1-R)}{n}}\right]$$

である．この信頼区間の幅は

$$2\times1.96\sqrt{\frac{R(1-R)}{n}}$$

信頼区間の幅が 4% 以下となる条件は

$$2\times1.96\sqrt{\frac{R(1-R)}{n}}\leqq0.04\cdots①$$

賛成者の比率が 80% と予想されるとき，$p=0.8$ であるが，R は p の近似値としてよいから，$R=0.8$ として代入すると，①は

$$2\times1.96\sqrt{\frac{0.8\times0.2}{n}}\leqq0.04$$

$\therefore\ \sqrt{n}\geqq39.2\quad\therefore\ n\geqq1536.64$

よって，**1537 人以上抽出すればよい．**

117

白球と黒球の割合は同じであるという仮説を立てる．400 個の球を無作為に取り出したときに，白球が取り出される個数を X 個とすると，仮説より，X は二項分布 $B\left(400,\ \frac{1}{2}\right)$ に従うので，近似的に正規分布

$N\left(400\times\frac{1}{2},\ 400\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)$，つまり $N(200,\ 10^2)$ に従う．

$Z=\dfrac{X-200}{10}$ とおくと，Z は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う．有意水準は 5% であり，正規分布表の $p(u)=0.5-0.025=0.475$ のときの u の値は $u=1.96$ であるから，$|Z|\geqq1.96$ が棄却域である．$X=222$ に対する Z の値は $Z=2.2$ で，これは棄却域に入るので，仮説は棄却される．よって，有意水準 5% で，**白球と黒球の割合は異なると判断してよい．**

118

新しい薬の副作用の発生する割合を p% とする．$p=10$ という仮説を立てる．このとき 400 人の患者のうち，副作用の発生した患者の数を X とすると，X は二項分布 $B(400,\ 0.1)$ に従うので，近似的に正規分布 $N(400\times0.1,\ 400\times0.1\times0.9)$，つまり $N(40,\ 6^2)$ に従うとしてよい．

したがって，$Z=\dfrac{X-40}{6}$ とおくと，Z は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う．

ここで，$P(Z\geqq u)=0.95$ となる u を求める．

$$P(Z\geqq u)=0.95$$
$$\Leftrightarrow\ P(u\leqq Z\leqq0)=0.5-0.05(=0.45)$$
$$\Leftrightarrow\ P(0\leqq Z\leqq-u)=0.45$$

であるから，$P(0\leqq Z\leqq1.64)=0.45$ より

$$u=-1.64$$

よって，棄却域は

$$Z\leqq-1.64\quad\therefore\ \frac{X-40}{6}\leqq-1.64$$

$\therefore\ X\leqq30.16$

$X=35$ は棄却域に含まれないので，$p=10$ という仮説は棄却されない．したがって，**新しい薬は副作用の発生する割合が低いとは判断できない．**

（注）「副作用が発生する割合が低いといえるか」とあるので $p\leqq10$ を前提としてよい．

§8 ベクトル

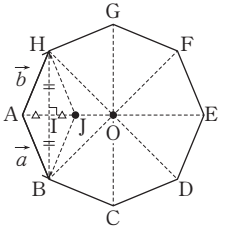
119

(1) 正八角形 ABCDEFGH の中心を O とすると

$$\vec{a}-\vec{b}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{HB}$$

ここで，$\angle AOB=\angle AOH=\dfrac{\pi}{4}$ より

$$\angle BOH=\frac{\pi}{2}$$



OB=OH=1 より　HB=$\sqrt{2}$

よって　$|\vec{a}-\vec{b}|=|\overrightarrow{HB}|=HB=\sqrt{2}$

次に，BH の中点を I，AI を 2:1 に外分する点を J とすると，$|\vec{a}|=|\vec{b}|$ より

$$|\vec{a}+\vec{b}|=|\overrightarrow{AJ}|=2AI$$
$$=2(OA-OI)=2\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$
$$=2-\sqrt{2}$$